

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 7. Julio-Diciembre 2022

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **El conjunto de números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los axiomas de Campo en $\mathbb{R}$, como condición suficiente y necesaria para la descripción eficiente de las fases lunares.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Descripción de la existencia de una raíz en común en la resolución simultánea de dos ecuaciones $f=0$ y $g=0$.**
Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Diseño de un modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning.**
Marcos Fajardo Rendón.
- **Fractal lineal cruz y modelos de probabilidad en estadística circular, para educación y seguridad ciudadana.**
Fernando Gustavo Isa Massa.
- **Clasificador Naive como herramienta de decisión en la contratación de personal académico del TESCO.**
Leopoldo Viveros Rosas, Rebeca Díaz Téllez, José Roberto Pérez Torres, Mario Luis Chew Hernández y José Antonio Vega González.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

<i>Caballero Mora Karen Salomé.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
<i>Guzmán Sánchez Sergio.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Hernández Escobar Marleny.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Isa Massa Fernando Gustavo.</i>	Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.
<i>Juárez Contreras Socorro.</i>	Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.
<i>Mendoza Pérez Armando Felipe.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Salazar Peña Enrique.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Sentiés Nacaspac María de Jesús.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Trejo Reséndiz Raciél.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 7, Julio-Diciembre 2022 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 07 de Julio de 2022.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 7.

Julio-Diciembre de 2022

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 5, julio-diciembre de 2021, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

El conjunto de números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los axiomas de Campo en $\mathbb{R}$, como condición suficiente y necesaria para la descripción eficiente de las fases lunares.	8
<i>The set of irrational numbers $\mathbb{Q}'$ and the Field axioms in $\mathbb{R}$, as a sufficient and necessary condition for the efficient description of the lunar phases.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

Descripción de la existencia de una raíz en común en la resolución simultánea de dos ecuaciones $f=0$ y $g=0$	13
<i>Description of the existence of a common root in the simultaneous resolution of two equations $f=0$ and $g=0$.</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Diseño de un modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning.	16
<i>Design of a pure sine wave regression model for electrical inverter using machine learning.</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

Fractal lineal cruz y modelos de probabilidad en estadística circular, para educación y seguridad ciudadana.	
<i>Cross linear fractal and probability models in circular statistics, for education and citizen security.</i>	23
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

Clasificador Naive como herramienta de decisión en la contratación de personal académico del TESCO.	
<i>Naive Classifier as a decision tool of TESCO's academic staff hiring.</i>	29
<i>Leopoldo Viveros Rosas, Rebeca Díaz Téllez, José Roberto Pérez Torres, Mario Luis Chew Hernández y José Antonio Vega González.</i>	

CARTA DEL EDITOR

Llega a su fin este año de 2022, año con 3 cifras idénticas, dos de ellas escritas seguidamente. Para los seguidores de las curiosidades matemáticas, al estilo del genial escritor Martin Gardner, es notable que el año 2011 también tiene dos cifras iguales y escritas seguidamente. La secuencia de los días de ambos años es también idéntica, por ejemplo, en ambos años fue sábado 2 de abril o miércoles 6 de julio, o jueves 1 de diciembre.

El año 2033 tendrá la misma secuencia de días y también tiene dos cifras idénticas seguidas. 2044, por ser bisiesto, a partir del martes 1 de marzo también tiene la misma secuencia de días en el calendario. Esta curiosa característica también se observó en los años 1955, 1966, 1977 y 1988, éste último a partir del 1 de marzo por ser bisiesto. En todos estos años fue y será siempre la misma secuencia de días y especialmente a partir de 1 de marzo para aquellos años bisiestos.

Aquellas personas que nacieron en 1955 o un poco antes y vivan todavía para 2044 (con 89 o un poco más años de edad), habrán vivido sucesos de sus vidas en 8 años con las características mencionadas: 1955, 1966, 1977, 1988, 2011, 2022, 2033 y 2044. Y tendrán la distinción de ser los únicos, ya que esto ocurre solamente cada 400 años; como el calendario actual entró en vigor el viernes 15 de octubre de 1582 quienes vivieron entre 1588 y 1644, solo vivieron 5 años con estas características, debido a que 1600 fue año bisiesto. Lo mismo sucederá (si los asteroides u otro fenómeno natural lo permite) quienes nazcan en 2355 o un poco antes y vivan todavía en 2444 ya que el año 2400 será bisiesto. Si bien los años terminados en 55, 66, 77, y 88 tienen secuencias de días idénticas (o sea el mismo calendario) éstas ya no serán iguales para los años terminados en 11, 22, 33 y 44, debido a que los años 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 y 2300 no son bisiestos.

Como es costumbre, comentamos brevemente, en esta ocasión, dos contribuciones al conocimiento matemático publicadas en años con la misma secuencia de días que este 2022.

En 1887, Giuseppe Peano publica su obra "*Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale*" y catalogado como el volumen II de la Biblioteca Matemática, cuando trabajaba como Profesor de la Academia Militar y la Universidad de Torino (Turín) en la bella Italia, bajo el sello editorial Fratelli Bocca, de Turín, con sucursales en Florencia, Roma y Nápoles. El texto actual lo produjo la Biblioteca de la Universidad de Cornell con el propósito de reemplazar el extremadamente deteriorado texto original y preservar su contenido para la posteridad, utilizando Software Xerox para digitalizar el contenido del texto original e imprimiéndolo a una resolución de 600 puntos por pulgada. La producción estuvo a cargo de la Comisión para la Preservación y el acceso a la información y la Compañía Xerox. Se concluyó en 1991. Cabe mencionar que la Biblioteca de la Universidad Cornell es pionera en la digitalización de este tipo de obras. El texto está escrito en italiano y consta de 7 capítulos, el prefacio, el índice alfabético y la introducción. Capítulo 1: Límite y la derivada geométrica. Capítulo 2: Curvas Planas. Capítulo 3: Curvas en el espacio y la superficie. Capítulo 4: Las Funciones de la posición de un punto. Capítulo 5: Definición de cantidades Geométricas. Capítulo 6: De la curvatura. Capítulo 7: Cifras variables; Envolturas. En el prefacio, el autor explica lo siguiente: Este volumen presenta las aplicaciones fundamentales

del cálculo infinitesimal a la geometría, que vengo desarrollando desde hace algunos años en mi curso en la Universidad. Hemos utilizado en este tratado algunas operaciones sobre segmentos, explicadas en la Introducción. Estas operaciones, desarrolladas en el presente siglo bajo diferentes formas por varios ilustres matemáticos, entre los que merecen una mención especial Bellavitis, Möebius y principalmente Hamilton y Grassmann, ya aparecen, más o menos ampliamente, en obras con fines didácticos, como en los cursos de Mecánica de Schnell. , y Somoff, en el curso de cálculo de Hoüel, y en otros lugares. En este libro, sin embargo, solo se usan las operaciones más simples; Los conceptos introducidos pueden reducirse esencialmente a los siguientes: **1)** La equivalencia de dos segmentos (página 1). Para indicar la equivalencia, el signo $\equiv$ que tipográficamente es más conveniente que el signo $\stackrel{=}{\sqsubset}$ usado por Bellavitis o el signo $\stackrel{=}{\sqcup}$ propuesto por Schnell y que, al menos en un primer estudio, evita los malentendidos que podría suscitar el signo $=$ adoptado por Möebius, Grassmann, Hamilton y otros. **2)** La suma geométrica, o composición de los segmentos (pág. 4), análoga a la composición de la traslación, velocidad, etc. **3)** El producto de dos segmentos (pág. 6) indicado con la escritura $a \times b$ es decir, el producto de las longitudes de los dos segmentos por el coseno del ángulo incluido. Este producto es una función simétrica (o conmutativa) de los dos segmentos, y distributiva con respecto a cada factor. Fue introducido por Resal, con el nombre de producto geométrico, y corresponde a la notación $-S ab$ de Hamilton. Si el primer segmento representa una fuerza, el segundo el desplazamiento del punto material al que se aplica la fuerza, el producto de los dos segmentos mide el trabajo de la fuerza. **4)** El área $a.b$ (pag. 17) es decir, el área del paralelogramo construido sobre los dos segmentos a y b ; y el volumen $a.b.c$ del paralelepípedo entre estos segmentos (pág. 24).

El área y el volumen son funciones alternas de los segmentos, y distributivas con respecto a cada segmento. Estas notaciones se deben a Grassmann. Los segmentos así definidos pueden ser funciones de variables numéricas, y se les aplican los conceptos de límite, derivadas ordinarias, sucesivas y parciales, fórmula de Taylor, funciones interpolares, etc., análogamente a lo que se hace para las funciones numéricas. Los mismos conceptos se aplican a áreas y volúmenes variables, y especialmente a puntos variables. Si un punto es función de una variable t , y esta mide tiempo, la primera derivada del punto no es otra que la velocidad, y la segunda derivada la aceleración del punto. Estas notaciones facilitan el estudio de curvas y superficies; las fórmulas adquieren una forma más concisa; finalmente, varios resultados, como los del Capítulo IV, serían difíciles de enunciar sin estas anotaciones. La simplicidad de las fórmulas habría aumentado y el cálculo geométrico se habría hecho más poderoso si se hubieran hecho nuevas convenciones, que, sin embargo, nos habrían llevado más allá de los límites establecidos en esta publicación. En este tratado se tuvo cuidado de definir claramente el límite de un punto, una línea recta, un plano (pág. 30) y una figura variable (pág. 302); Se prueban algunos teoremas sobre estos límites.

Estas definiciones y demostraciones faltan en los tratados comunes; sin embargo, pueden omitirse en un primer estudio, pero son necesarios para un tratamiento riguroso de las cuestiones de geometría infinitesimal; ya que, como se demuestra que el límite de un producto es igual al producto de los límites, también debe examinarse en qué condiciones, como por ejemplo, la intersección de dos superficies variables tiene como límite la

intersección de los límites de las superficies. Además, estas definiciones permiten un estudio más preciso de las envolventes de curvas y superficies. En el Capítulo IV se estudian las funciones numéricas de la posición de un punto. La derivada de tal función es un segmento cuyo valor absoluto fue llamado parámetro diferencial de primer orden de Lame.

Las proposiciones de este capítulo permiten resolver de forma muy elegante los principales problemas referentes a las normales de curvas y superficies, y de los máximos y mínimos geométricos. 2) El Cap.V contiene las definiciones de longitudes, áreas, volúmenes y las fórmulas relacionadas. También se tratan algunas cuestiones generales sobre campos de puntos, sobre funciones distributivas de campos, y sobre integrales extendidas a campos. Las fórmulas de aproximación de las áreas van acompañadas de los respectivos residuos; Estos fueron obtenidos recientemente por el autor Mansion. El concepto de polar de una recta o de un plano variable en un punto, así como la proposición descrita en las páginas 318-333, permiten resolver los segmentos y otras cuestiones similares: Dadas las derivadas (velocidad) de un sistema de puntos variables, encuéntrase: a) el punto en el que una línea que une dos puntos del sistema toca su envolvente, suponiendo que esta línea se mueve en un plano fijo; b) el plano tangente en cualquier punto de la superficie, generado por una recta del sistema; c) las características de los planos que unen los puntos de datos de tres en tres; d) la derivada de los puntos de encuentro de estas rectas y planos variables.

En este libro cité varias veces el volumen de Cálculo ya publicado por mí en 1884. En ese volumen me comprometí a publicar, con el permiso del ilustre Prof. Genocchi, la primera parte del curso dado por él en la Universidad. Agregué algunas proposiciones en parte extraídas de varios trabajos, en parte mi propia investigación original. Varias de estas adiciones están marcadas con mi nombre, con la letra más pequeña o con ejercicios de palabras; los que tienen los números 76-78, 91-96, 110, 112, 114, 116, 126, 152-155, 157-160, 162, 192, 206, 208 no llevan ningún signo. Estas adiciones me obligan a hacer algunas ligeras modificaciones; por lo tanto, el libro publicado no representa fielmente las lecciones del Prof. Genocchi sin embargo, ha sido mi trabajo la compilación realizada.

Al respecto, el Prof. Genocchi publicó en *Annals of Mathematics* (Serie 2, tomo XII) la siguiente declaración: *“En estos días los libreros de los hermanos Bocca tienen un volumen titulado Cálculo diferencial y principios del cálculo integral...Para que no se me atribuya lo que no es mío, debo declarar que no tuve parte en la compilación del mencionado volumen, y que todo se debe a ese distinguido joven que es el doctor Giuseppe Peano, que suscribió el Prefacio y las Anotaciones”*.

Por tanto, aunque he hecho un uso extensivo de las lecciones del ilustre profesor, asumo toda la responsabilidad de lo que está escrito en ese libro, como si en la portada del mismo no apareciera otro nombre que el mío. Finalmente, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi amigo Gino Loria, profesor de geometría superior en la Universidad Real de Génova, por el cuidado que puso en la corrección de este libro.

El lunes 19 de diciembre de 1921 se publica en los Informes de la Academia de Ciencias Volumen 173, páginas 1304-1308, el interesante artículo de Emile Borel titulado “La Teoría del Juego y las Ecuaciones Integrales con núcleos Simétricos sesgados” en lengua francesa

(existe una traducción al inglés realizada por Leonard J. Savage de la Universidad de Chicago y una edición que contiene artículos relacionado con este tema, realizada por David Cantala del Colegio, 2014, Ciudad de México). En este último texto se menciona que E. Borel presenta el concepto de “estrategia”, clave en la Teoría de Juegos. El propósito del de Borel es investigar si es posible determinar un mejor método de juego por lo que empieza por definir este último concepto. Así mismo expresa matemáticamente el término simetría del juego con la expresión $a_{ij} = 0$. Establece la siguiente proposición: La probabilidad de que, en un momento dado del juego, el jugador A adopte el código C_λ para determinar su conducta en ese momento, es p_k ; la probabilidad análoga para un jugador B se denota por q_k , y n representa el número de códigos restantes; en general se tiene:

$$\sum_1^n p_k = 1, \sum_1^n q_k = 1$$

El cálculo de probabilidades permite estimar la probabilidad de que A gane un juego.

$$\text{Entonces, } a \in A; b \in B \rightarrow b = 1 - a.$$

Consecuentemente:

$$\begin{cases} a = 1/2 + a_{k1} \\ b = 1/2 + a_{k2} \end{cases}; -1/2 < a_{k1}, a_{k2} < +1/2$$

Y satisfacen: $a_{k1} + a_{k2} = 0$.

De lo anterior se deduce la simetría del juego $a_{ij} = 0$.

Con base en lo anterior, la probabilidad de que el jugador A gane el juego es:

$$\sum_1^n \sum_1^n (1/2 + a_{ik}) p_i q_k = 1/2 + a \quad (1)$$

Donde:

$$a = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} p_i q_k = \sum_{i=1}^{l-i} \sum_{k=1}^{k-1-i} a_{ik} (p_i q_k - p_k q_i).$$

El autor realiza un análisis cuando $n = 3$, comparando la eficiencia de las formas de jugar. De ello se deriva la condición de establecer una forma de juego que permita competir aún con muchas adversidades en contra y consiste en trazar al azar condiciones que atribuyan probabilidades p_1, p_2, p_3 a los códigos C_1, C_2, C_3 respectivamente, antes de tomar cualquier decisión, de tal manera que un jugador pueda tomar ventaja sobre el otro, debido a que se desechan las malas formas de juego, así como el valor de la variable a_{ik} . Con ello, el resto de la partida dependerá de aspectos más psicológicos que de aspectos matemáticos. Por otro lado, es posible extender las consideraciones anteriores al caso en el que las formas de juego se extienden al infinito continuo. Se reemplaza (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi(x, y) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_1(x_1, y_1) = 1$$

Donde las funciones crecientes ϕ, ϕ_1 dependen por ejemplo, de dos variables, y las integrales se definen en el sentido de Stieltjes. Estas funciones definen las maneras de jugar de los jugadores A y B . La probabilidad de ganar el juego se define en términos de la función de núcleo simétrico sesgado $f(x, y, x_1 y_1)$. El núcleo depende siempre de las convenciones del juego, mientras que las diversas formas de ecuaciones integrales dependen del problema en sí. Diversos problemas militares, económicos y financieros relacionados con la probabilidad se pueden resolver con este objeto matemático.

Como siempre la editorial se complace de recibir propuestas originales e innovadoras de los autores.

Para la sección objetos matemáticos se describe en un artículo las condiciones suficientes y necesarias para el cálculo de las fases lunares mediante un algoritmo original y otro artículo presenta la existencia de una raíz común para la resolución simultánea de dos ecuaciones.

En la sección objetivos matemáticos se presentan aplicaciones originales de las matemáticas en la toma de decisiones utilizando modelos de probabilidad y estadística como el artículo modelo de clasificador Naive para el TESCO o la contribución mediante un modelo de educación y seguridad ciudadana en países mediante fractales cruz; así como modelos de regresión e inteligencia artificial con un artículo que aborda el diseño de un inversor eléctrico para sistemas fotovoltaicos.

Los editores.

El conjunto de números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los axiomas de Campo en $\mathbb{R}$, como condición suficiente y necesaria para la descripción eficiente de las fases lunares.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- Una consecuencia de la existencia del conjunto de los números irracionales es la precisión que conlleva a su uso al interpretar datos en las mediciones y cálculos realizados. Si bien, por definición, este conjunto numérico tiene también la propiedad del acercamiento o aproximación entre números racionales $\mathbb{Q}$, es justamente esta propiedad la que condiciona la mayor exactitud posible en la estimación de mediciones. Una de estas mediciones se relaciona con la determinación eficiente de las fases lunares en cualquier mes de cualquier año del calendario actual. Por ello, propongo un Teorema y su demostración cuyos corolarios permiten obtener los datos que muestran las fases lunares de manera eficiente. Dedico el presente artículo a Guadalupe Herrera Rodríguez, con infinito cariño y sincero agradecimiento por todo el apoyo que recibí de ella.

Palabras Clave- Conjunto de los números Irracionales, revolución sinódica, fases lunares.

Zusammenfassung- Eine Folge der Existenz der Menge irrationaler Zahlen ist die Genauigkeit, die sie bei den durchgeführten Messungen und Berechnungen interpretieren lassen. Obwohl diese Zahlenmenge definitionsgemäß auch die Eigenschaft der Annäherung bzw. Annäherung zwischen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besitzt, bestimmt gerade diese Eigenschaft die größtmögliche Genauigkeit bei der Schätzung von Messwerten. Eine dieser Messungen bezieht sich auf die effiziente Bestimmung der Mondphasen in jedem Monat eines beliebigen laufenden Kalenderjahres. Daher schlage ich einen Satz und seinen Beweis vor, dessen Folgerungen es ermöglichen, die Daten zu erhalten, die die Mondphasen effizient zeigen. Ich widme diesen Artikel Guadalupe Herrera Rodríguez mit unendlicher Zuneigung und aufrichtiger Dankbarkeit für all die Unterstützung, die ich von ihr erhalten habe.

Schlüsselwörter- Irrationale Zahlen, synodische Revolution, Mondphasen.

Резюме - Следствием существования множества иррациональных чисел является точность, которую они позволяют интерпретировать в производимых измерениях и вычислениях. Хотя по определению этот числовой набор также обладает свойством аппроксимации или аппроксимации между рациональными числами $\mathbb{Q}$, именно это свойство определяет максимально возможную точность оценки измерений. Одно из этих измерений относится к эффективному определению лунных фаз в любом месяце любого текущего календарного года. Поэтому я предлагаю теорему и ее доказательство, следствия которой позволяют получить данные, эффективно

показывающие лунные фазы. Я посвящаю эту статью Гваделупе Эррере Родригес с бесконечной любовью и искренней благодарностью за всю поддержку, которую я получил от нее.

Ключевые слова - Набор иррациональных чисел, синодический оборот, лунные фазы.

Mathematical Subject Classification: 85-08

I. INTRODUCCIÓN

El presente artículo comprende 4 partes. Éstas conforman los objetos matemáticos y sus relaciones como condición suficiente y necesaria para la descripción de cualquier fase lunar de cualquier mes de cualquier año. La estructura de la descripción matemática la componen 6 definiciones, 5 escolios, un Teorema, su demostración y 2 corolarios que justifican la eficiencia del Teorema. El único dato que es necesario conocer con la mayor precisión posible, es la fecha y hora de una cualquiera fase lunar de cualquier año y a partir de ese dato, aplicar la expresión descrita en el Teorema propuesto.

Por acuerdo matemático es de noción común que $\mathbb{Q}'$ represente a los números irracionales.

II. DEFINICIONES

Def. 1.- Revolución Sinódica es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos conjunciones o dos oposiciones lunares con valor medio de $29^d, 12^h, 44^m$ [1], [2]; $29^d, 12^h, 44^m, 2.78^s$ [3] éste último congruente con 29.5305877315 días.

Def. 2.- Año trópico es el lapso de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries [3]. Por proporcionalidad entre las medidas del año trópico (365.2425 días en la antigüedad; 365.2422 en 1582; 365.24219879 días realizada por el astrónomo norteamericano Simon Newcomb en 1900, (citado por Gordon Moyer)[4], he estimado la duración del año trópico para 2022 con un valor de 365.2421906528 días solares medios.

Def. 3.- El Ciclo de Metón es la congruencia entre los años trópicos y las revoluciones sinódicas. 19 años sidéreos

$\cong 234.997071$ revoluciones sinódicas [3].

Escolio 1.- La congruencia anterior indica que las fases de la Luna se reproducirán cada 19 años en la misma fecha (no así el nombre del día de la fecha).

Def. 4.- La diferencia entre el año trópico y las revoluciones sinódicas en ese periodo de tiempo está dada por:

$$(6 * 1.469412269) + (4 * 0.469412269) = 8.816473614 + 1.877649076 = 10.694122690 \text{ días} \quad (1)$$

Escolio 2.- Por el convenio que establece la duración en días de cada mes de un año trópico, de acuerdo con las reglas del Calendario Salamantino [5] actualmente en uso, y por Def. 1, se tiene que para los meses de 30 días (abril, junio, septiembre y noviembre) la diferencia es: $30 - 29.5305877315 \cong 0.469412269$. Para los meses de 31 días (marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre) la diferencia es: $31 - 29.5305877315 \cong 1.469412269$

Además, el mes de enero tiene 31 días y febrero 28 días en años no bisiestos, la lunación de febrero con respecto a enero será 1.469412269 días antes.

La lunación de marzo, tomando en consideración los 28 días de febrero en año no bisiesto, y la duración de una revolución sinódica, será 1.5305877315 días después, cuya consecuencia es que las lunaciones de enero y marzo suceden en la misma fecha de todo año no bisiesto.

Para el caso de todo año bisiesto, al tener febrero 29 días y tomando en cuenta la revolución sinódica, la lunación del mes de enero con respecto a febrero es la misma que en un año no bisiesto, pero la lunación de marzo con respecto a enero será 1.0611754625 días antes, es decir, un día y una hora con 28 minutos y 5.55996000001 segundos.

Escolio 3.- Así, la diferencia de lunaciones entre un mes determinado de un año y ese mismo mes del año siguiente será de 10.694122690 días antes, o 10 días 16 horas, 39 minutos, 32.200416 segundos antes.

Def. 5.- Todo número irracional [6] es aquel que no posee las propiedades del número entero o del número racional.

Escolio 4.- Geométricamente, todo número irracional se representa con la noción de un segmento cuya longitud es inconmensurable con respecto a otro segmento cuya longitud es la unidad. Todo número Real $\mathbb{R}$ se puede representar como una fracción decimal infinita, y como consecuencia los números irracionales $\mathbb{Q}'$ se pueden representar por medio de fracciones decimales no periódicas.

Escolio 5.- Propiedades de los Números Irracionales $\mathbb{Q}'$.

a) Este conjunto numérico determina acercamientos o aproximaciones (del término alemán “*schnitt*” [7] entre elementos del conjunto de los Números Racionales $\mathbb{Q}$, para las que no existe un mayor número perteneciente a la clase inferior ni tampoco un menor número perteneciente a la clase superior.

b) Es posible interpretar sobre el eje Real una saturación de números irracionales (conocida como densidad), ya que entre cualquiera dos números siempre existe un número irracional.

c) El conjunto $\mathbb{Q}'$ es innumerable o incontable y es un conjunto de segunda categoría de tipo G_δ (en Teoría de las Categorías), es decir es un conjunto $F_\sigma(G_\delta)$.

d) Los números algebraicos irracionales no permiten aproximaciones de orden arbitrario por medio de fracciones racionales (en contraste con los números trascendentes), es decir: $\forall \xi$ de grado n , $\exists$ un $c > 0 \mid \forall p, q \in \mathbb{Z}$, con $q > 0$ se tiene:

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}.$$

e) Los números irracionales cuadráticos, y sólo ellos, se pueden expresar por medio de fracciones periódicas continuas.

f) Por el Teorema de Roth, es posible probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c(\varepsilon) > 0 \mid \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > c(\varepsilon)q^{-2-\varepsilon} \text{ si y sólo si } \xi \notin \mathbb{Q}, \text{ y } \mathbb{Q} \text{ es número algebraico.}$$

Consecuencia 1.- Los números e, π, e^π son números irracionales trascendentes, sin embargo no se ha probado satisfactoriamente que:

$$e + \pi, e\pi$$

Sean números irracionales.

Def. 6.- Campo F [8] es un conjunto numérico con dos operaciones binarias: la adición y la multiplicación que satisfacen los siguientes axiomas:

- $x + y = y + x, \mid x, y \in F.$
- $x + (y + z) = (x + y) + z, \mid x, y, z \in F.$
- $x + 0 = x, \mid x \in F.$
- $y + (-y) = 0, \mid y \in F.$
- $x(yz) = (xy)z, \mid x, y, z \in F.$
- $x(y + z) = xy + xz, \mid x, y, z \in F.$
- $xy = yx, \mid x, y \in F.$
- $1z = z, \mid z \in F.$
- $xx^{-1} = 1, \mid x \neq 0 \wedge x \in F.$

III. TEOREMA.

$$\text{Sea } \frac{N A_T}{R_S} = m_L + m_{FL}, \quad (2)$$

Donde:

N es el número total de años trópicos entre dos lunaciones determinadas.

A_T es la duración del año trópico.

R_S representa una revolución sinódica o mes lunar.

m_L es el número entero de meses lunares.

m_{FL} representa la fracción decimal del mes lunar o revolución sinódica.

Prueba:

$N, m_L \in \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, por representar N, m_L elementos de la serie ordenada de números enteros positivos con la unidad como primer elemento [9]. $A_T, R_S, m_{FL} \in \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ por Def. 1; Def. 2; Def. 3; Def. 5; Escolio 5 (a) y 5 (c). Además, el producto de un número entero $\mathbb{Z}$ y un número irracional $\mathbb{Q}'$ es un número irracional, por ser elemento de un campo F , Def 6 (g); el cociente de dos números irracionales $\mathbb{Q}'_1$ y $\mathbb{Q}'_2$ es también un número irracional $\mathbb{Q}'$, por Def. 6 (i).

Consecuentemente, m_{FL} representa valor muy aproximado de la posición de la Luna con respecto a la Tierra con relación a las fases lunares en el calendario actual, por Def. 5 y Escolio 5 (a).

IV. COROLARIOS.

Corolario 1.

La Isla de Pascua cuyas coordenadas geográficas son $27^{\circ} 7' 10'' S, 109^{\circ} 21' 17'' O$ fue descubierta para el mundo occidental el domingo de Pascua de 1722 y se anexó a Chile en 1888 [10]. Determinar la fecha del descubrimiento realizado por el navegante holandés Jacob Roggeveen. De la expresión (2), sustituyo los siguientes datos:

$$\frac{(300)(365.2421906528)}{29.5305877315} = 3710.48006873767$$

300 es el número de años de diferencia entre este año de 2022 y 1722; por Def. 1 y Def. 2 el resultado corresponde a 3,710 meses lunares con la fracción de un mes lunar o revolución sinódica de 0.48006873767 que es congruente con 14.176711975 días (como resultado de multiplicar esa fracción decimal por el valor de una revolución sinódica, por Def. 1) y se debe sumar al día del mes de la luna llena de marzo de 2022, es decir, el 18 de marzo, pues estamos estimando un valor en tiempo pasado, Def. 4, Escolio 3.

También se debe tomar en cuenta la primera lunación del año para estimar cualquier lunación de ese año.

Para este 2022, la lunación del mes de enero ocurrió el 18 de ese mes a las 00 horas y 18 minutos y por Escolio 2, la lunación de marzo es la misma que la lunación de enero.

Entonces, al sumar $14.176711975 + 18.0125 = 32.189211975$, valor al que se le sustrae 31 días del mes de marzo.

Así, la luna llena fue el 1 de abril de 1722 a las 04 horas 32 minutos y 27.91 segundos. Ese día fue miércoles [11].

De acuerdo con las reglas para estimar la fecha de la Pascua de Resurrección, ésta debe ser el primer domingo posterior a la primera luna llena después del equinoccio de primavera.

Entonces, al estar la luna en fase llena el miércoles 1 de abril de 1722 a las 04 horas 32 minutos y 27.91 segundos, el domingo 5 de abril de 1722 correspondió a la Pascua de Resurrección y al descubrimiento de la Isla de Pascua. El sitio web: https://historia.nationalgeographic.com/es/a/asi-se-descubrio-de-casualidad- isla-pascua_14109 recuperado el jueves 15 de diciembre de 2022, confirma el cálculo realizado para la estimación solicitada.



Fig. 1. Captura del sitio web de Historia del National Geographic. En el sitio web: <http://www.sbkemexico.com/calendarioLunar.php?mes=4&anio=1722> recuperado el jueves 15 de diciembre de 2022, establece la lunación de esa fecha.

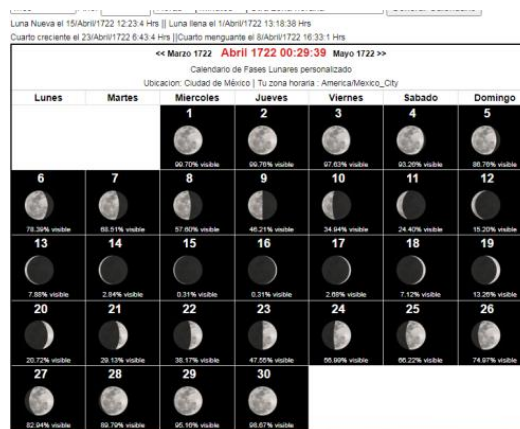


Fig. 2. Lunación del mes de abril de 1722.

Escolio 6.- Se aprecia una diferencia de 4 horas 3 minutos y 7 segundos de diferencia entre ambos resultados, y aunque el sitio web no muestra el procedimiento de la estimación, los resultados son muy congruentes. Entre la Isla de Pascua y la Ciudad de México hay aproximadamente 2 horas de diferencia, de tal manera que en ese lugar eran las 2 de la mañana, 32 minutos y 27.91 segundos.

Corolario 2.

El siguiente relato, anotado en actas del Cabildo de la Ciudad de México, históricamente aceptado como relato verdadero [12], permite realizar conjeturas interesantes relacionadas con las ideas de la física cuántica y el modelo de las geometrías no euclidianas.

Sin embargo, en esta ocasión lo utilizo para estimar la fase lunar de la fecha mencionada en seguida. Aproximadamente a las ocho de la noche del lunes 25 de octubre de 1593 [11], un hombre empleado como soldado hacía su trabajo en una torre de vigilancia del palacio del Gobernador en la ciudad de Manila, Capitanía General de las Filipinas. La noche anterior, domingo 24 de octubre, el Gobernador Gómez Pérez Dasmariñas había sido asesinado por piratas chinos, y los guardias resguardaban el palacio, pues en breve sería nombrado un nuevo gobernador. Repentinamente, el soldado empezó a marearse y a sentirse agotado, casi al borde del desvanecimiento.

Al recuperarse unos momentos más tarde, se percató que se hallaba en un lugar que no le resultaba familiar, además notó que era el amanecer en una gran plaza, donde la gente iba y venía con mercancías y alimentos, en un bullicio que no le era familiar; al verle los transeúntes vestido de forma diferente y oírle gritar el "quien vive" de manera desesperada, lo empezaron a rodear y a verle con curiosidad: se hallaba en la plaza mayor de la Ciudad de México, en el Virreinato de Nueva España, a miles de millas de su hogar. Algunos guardias al notar el bullicio de la gente, se acercaron a él y lo encontraron con el uniforme incorrecto y empezaron a preguntarle quién era y a qué se dedicaba. La noticia del asesinato del gobernador de las Filipinas era aún desconocido para las personas de Ciudad de México.

El soldado que repentinamente apareció llevaba, según los informes, el uniforme de la guardia en Manila y conocía la noticia del asesinato y empezó a contar detalladamente el trágico fin del gobernador Pérez Dasmariñas en un navío que recorría el mar y se localizaba a cierta distancia de Manila. Las autoridades lo llevaron a prisión por ser un desertor y

además se sospechaba de ser un siervo del diablo. Meses más tarde, las noticias de la muerte del gobernador llegaron a México en un galeón de las Filipinas. Finalmente fue liberado de prisión por las autoridades y se le permitió volver a casa.

Con base en la expresión (2), se tiene:

$$\frac{(429)(365.2421906528)}{29.5305877315} = 5305.9864982948$$

El resultado muestra 5,305 revoluciones sinódicas o meses lunares en los 429 años transcurridos entre 2022 y 1593. Para determinar la fase lunar solicitada se multiplica el valor decimal por el valor de una revolución sinódica, obteniendo:

$$(0.9864982948)(29.5305877315) = 29.1318744415 \text{ días} \quad (3)$$

Este valor representa los días y su fracción que debe sumarse a la lunación del mes de septiembre de este año 2022, por lo que, por Escolio 2), y a partir de la lunación del mes de marzo de 2022, tenemos:

$$(4 * 1.469412269) + (2 * 0.469412269) = 6.816475298$$

Ahora, como cada mes lunar es más corto que los meses del calendario salmantino (con excepción del mes de febrero), el valor buscado como segundo sumando es:

$$18.0125 - 6.816475298 = 11.196024702 \text{ días} \quad (4)$$

Este valor representa la fase de luna llena del mes de septiembre de 2022.

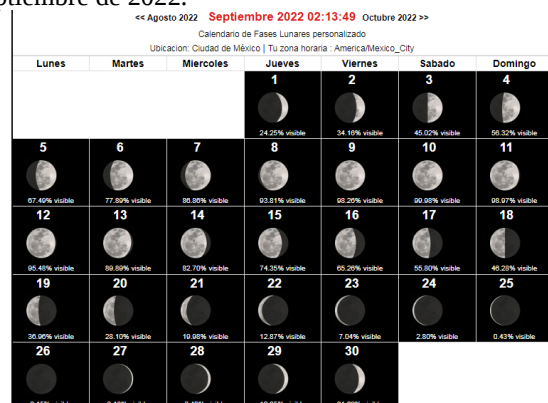


Fig. 3. Del sitio web: <http://www.sbk-mexico.com/calendarioLunar.php> se aprecia que la lunación en ese mes ocurrió el 11 del mes (con una discrepancia de algunas horas, pues aquí se aprecia que ocurrió el 10; aunque este sitio no muestra los cálculos). El resultado es muy congruente.

Finalmente, asociamos aditivamente (3) y (4):

$$29.1318744415 + 11.196024702 = 40.3278991435$$

A este valor se le sustrae 30, que representa el número de días del mes de septiembre (tomado como referencia):

$$40.3278991435 - 30 = 10.3278991435$$

La luna llena del mes de octubre de 1593 fue el día 10 de octubre a las 07 horas, 52 minutos y 10.4859984 segundos.

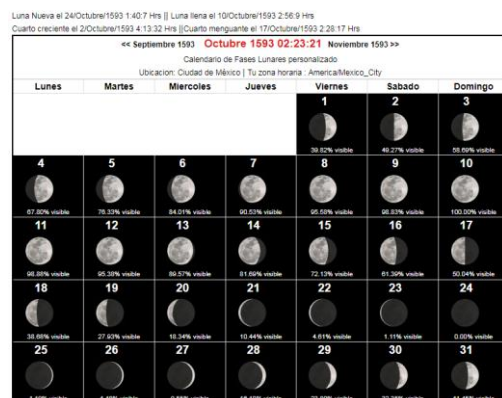


Fig. 4. Del sitio web: <http://www.sbk-mexico.com/calendarioLunar.php> se aprecia que la luna llena ocurrió el lunes 10 de octubre de 1593. La discrepancia entre ambos resultados es de 4 horas y 56 minutos y un segundo. Ambos resultados son congruentes.

De tal manera que cuando el personaje referido se desvaneció en Manila y casi de inmediato se recupera en la Ciudad de México, la luna estaba en fase de luna nueva, el lunes 24 de octubre de 1593. Así lo muestra la Imagen 4.

Como dato complementario y algo ajeno al tema, menciono que la experiencia de este personaje fue excepcional.

Debido a la diferencia de horas entre ambas ciudades, aproximadamente 14 horas en sentido este de Greenwich o 10 horas en sentido opuesto, si perdió el sentido a las 20 horas y casi de inmediato se recupera a las 06 horas, prácticamente regresó a la mañana del lunes 24 de octubre de ese año, aunque en otra ciudad.

V. CONCLUSIONES

He mostrado la utilidad del conjunto de los números irracionales $\mathbb{Q}'$ en la descripción de la posición de nuestro Satélite natural.

También es posible predecir su posición a corto, mediano y largo plazo, con la condición de que en lugar de sumar al final de los cálculos, se debe restar, debido a la relación entre la revolución sinódica y el número de días de cada mes en el calendario.

Mostré la congruencia de resultados con ayuda de un sitio web, a manera de justificar la congruencia con los resultados obtenidos aquí. Por ello, si funciona para datos históricos, también funciona para realizar predicciones a futuro.

La expresión (2) es extremadamente sencilla y fácil de entender. Sin embargo, la posible complicación se deriva en la interpretación del resultado, ya que el valor obtenido representa el número de días a agregar o sustraer del valor que representa el día de las fases lunares en algún mes del año tomado como referencia, ya que se necesita cierta experiencia en el manejo de los datos, pero nada imposible de conseguir con un poco de práctica.

La aplicación más común de este tipo de datos ha sido en la estrategia militar y también en la planificación del supuesto alunizaje del 20 de julio de 1969.

REFERENCIAS

- [1] I. Newton. “*Principios Matemáticos de la Filosofía Natural. Libro III. Sistema del Mundo. Proposición XXIX, Problema X*”. Grandes Obras del Pensamiento. Volumen 21. Ediciones Altaya, 1993. Barcelona. p.p. 517-518.
- [2] I. Newton. “*Principios Matemáticos de la Filosofía Natural. Libro III. Sistema del Mundo. Proposición XXIX, Problema X*”. Ediciones Alianza Universidad, 1987. Madrid. p.p. 674-675.
- [3] N. R. Russell, R. S. Dugan, J. Q. Stewart. “*Cosmografía*”. U.T.E.H.A. 1954. Ciudad de México. p. 154.
- [4] F. G. Herrera Armendia. “*El Calendario Liliario*”. Revista Electrónica Episteme No. 11. Universidad del Valle de México. Abril- Septiembre 2007. Ciudad de México. Sección Reseñas.
- [5] A.M. Carabias Torres. “*Salamanca y la medida del Tiempo*”. Ediciones de la Universidad de Salamanca. 2012. Salamanca, España.
- [6] L. D. Kudryavtsev. “*Irrational Numbers*”. Encyclopaedia of Mathematics. Vol 5. Kluwer Academic Publishers. 1990. Dordrecht, Netherlands. p. 189.
- [7] R. Dedekind. “*Essays on the Theory of Numbers. I.- Continuity and irrational numbers. II.- The Nature and Meaning of Numbers*”. Dover Publications Inc. 1963. New York. p.p.. 12 - 19.
- [8] B. Fine, G. Rosenberger. “*The Fundamental Theorem of Algebra*”. Springer Verlag. 1997. New York. p. 5.
- [9] G. Peano. “*Aritmethices Principia. Nova Methodo Exposita*”. Augustae Taurinorum. 1889. Romae. p. 1.
- [10] National Geographic Society. “*Islands of the Pacific*”. National Geographic Magazine. December, 1974. Washington.
- [11] F.G. Herrera Armendia. “Propuesta de un Teorema y su Demostración para el cálculo de la relación de los nombres de los días y las fechas correspondientes en $\mathbb{R}$ ”. Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos No. 6, enero – junio de 2022. Ciudad de México. p.p. 7 – 10.
- [12] A. De Valle-Arizpe. “*Historia, tradiciones y leyendas de calles de México*”. Editorial Diana. 1986. Ciudad de México. p.p. 49 – 53.

Descripción de la existencia de una raíz en común en la resolución simultánea de dos ecuaciones $f=0$ y $g=0$.

Jaime William Flores Tecalco

Estudiante de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior de México (ENSM), Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Estudiante de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México.

Resumen- En este artículo se plantea un análisis descriptivo de la obtención de un polinomio homogéneo denominado resultante R de dos ecuaciones $f=0$ y $g=0$ con el fin de que anulando la resultante $R(f;g)$ sea la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones $f=0$, $g=0$ tengan una raíz en común.

Palabras clave- polinomio homogéneo, resultante, ecuaciones, raíz.

Abstract- This article proposes a descriptive analysis of obtaining a homogeneous polynomial called resultant R from two equations $f=0$ and $g=0$ so that canceling the resultant $R(f;g)$ is the necessary and sufficient condition for the two equations $f=0$, $g=0$ have a root in common.

Keywords- homogeneous polynomial, resultant, equations, root.

Mathematical Subject Classification: 11Axx.

I. INTRODUCCIÓN

Se expone un caso particular de dos ecuaciones con dos incógnitas r, s . Por medio del teorema de eliminación [1] se obtendrá una condición necesaria y suficiente que satisfaga las ecuaciones originales.

Sean las ecuaciones:

$$r^4 + s^4 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$r^5 + s^5 - 1 = 0 \quad (2)$$

Se reescribe la ecuación (1) en función de r^4 .

$$r^4 = -(s^4 - 1) \quad (3)$$

Se aplican axiomas de campo de $\mathbb{R}$ en la ecuación (3) para reescribirla en función de r^5 .

$$\begin{aligned} r^4 &= -(s^4 - 1) \\ r(r^4) &= r(-(s^4 - 1)) \\ r^5 &= -r(s^4 - 1) \end{aligned} \quad (4)$$

Se reescribe la ecuación (2) en función de r^5 .

$$r^5 = -(s^5 - 1) \quad (5)$$

Se igualan las expresiones (4) y (5) de tal forma que se coloquen en función de r^4 .

$$r(s^4 - 1) = (s^5 - 1) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [r(s^4 - 1)]^4 &= [(s^5 - 1)]^4 \\ r^4(s^4 - 1)^4 &= (s^5 - 1)^4 \end{aligned} \quad (7)$$

Se sustituye (3) en (7) para obtener una ecuación con solo una incógnita.

$$\begin{aligned} -(s^4 - 1)(s^4 - 1)^4 &= (s^5 - 1)^4 \\ (s^5 - 1)^4 + (s^4 - 1)(s^4 - 1)^4 &= 0 \\ (s^5 - 1)^4 + (s^4 - 1)^5 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Claramente se observa que las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes a las ecuaciones (3) y (6).

Partiendo de la condición (8) obtenemos dos casos posibles:

Caso 1:

Si $s^4 - 1 = 0 \rightarrow s^5 - 1 = 0$ y por lo tanto cualquiera que sea el valor de r satisface la segunda ecuación, entonces se obtiene en la primera $r = 0$.

Caso 2:

Si $s^4 - 1 \neq 0$ y cumpliendo la condición (8), entonces podemos reescribir (6) en función de r^4 al utilizar axiomas de campo de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r(s^4 - 1) &= (s^5 - 1) \\ r &= \frac{s^5 - 1}{s^4 - 1} \end{aligned} \quad (9)$$

$$r^4 = \frac{(s^5 - 1)^4}{(s^4 - 1)^4} = -(s^4 - 1) \quad (10)$$

Por lo tanto (8) es una condición suficiente, en este caso de veinteavo grado, que cualquiera de sus raíces al tomar el valor de s debe satisfacer las ecuaciones (1) y (2) con un mismo valor de r . [3]

II. DESCRIPCIÓN

Sean dos ecuaciones:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (11)$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0 \quad (12)$$

Se pueden definir las raíces de $f(x)$ como

Si alguna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \leftrightarrow a_0 \neq 0$ (13)

$$\alpha_n \in g(x) \rightarrow g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) = 0 \quad (14)$$

Es decir, si $g(\alpha_1) = 0 \rightarrow \alpha_1$ es una raíz común de (11) y (12).

Por lo tanto

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) = 0 \quad (15)$$

Y es una función simétrica de las raíces α_n y la denotaremos como la función simétrica φ .

$$\varphi(g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n)) \quad (16)$$

Diremos que un polinomio en variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ con coeficientes enteros es simétrico si después de hacer cualquier tipo de permutación en las x_n variables obtenemos el polinomio inicial. [2]

Entonces la máxima potencia de α_1 es α_1^m ya que en un polinomio, en las funciones elementales simétricas, que representa un polinomio simétrico es de igual grado que la mayor potencia de x_1 que aparezca en este polinomio simétrico. [3]

Por lo tanto, si m es el mayor exponente de los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ y n de los coeficientes $b_1, b_2, \dots, b_n$ de $g(x)$, el polinomio:

$$a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) \quad (17)$$

Es un polinomio homogéneo y puede expresarse como:

$$a_0^m \varphi \quad (18)$$

Este polinomio se le conoce como resultante de $f(x)$ y $g(x)$. Lo podemos designar con $R(f; g)$:

$$R(f; g) = a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) \quad (19)$$

La anulación de la resultante $R(f; g)$ es la condición necesaria y suficiente para que $f = 0$ y $g = 0$ tengan una raíz en común. [3]

Si $b_0 \neq 0$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ son raíces de la ecuación (12), la resultante $R(g; f)$ es:

$$R(g; f) = b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2) \cdots f(\beta_m) \quad (20)$$

Y su anulación es nuevamente la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ tengan una raíz en común. [3]

En este punto, se observa la siguiente relación:

$$g(x) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_m) \quad (21)$$

Considerando (21) podemos reescribir (19) como:

$$R(f; g) = a_0^m b_0^n (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \cdots (\alpha_1 - \beta_m) \cdots (\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2) \cdots (\alpha_n - \beta_m) \quad (22)$$

Utilizando el axioma de campo asociativo de la multiplicación definido en $\mathbb{R}$, se obtiene:

$$R(f; g) = -1^{mn} a_0^m b_0^n (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \cdots (\beta_1 - \alpha_n) \cdots (\beta_m - \alpha_1)(\beta_m - \alpha_2) \cdots (\beta_m - \alpha_n) \quad (23)$$

Al sustituir (20) en (23) se reescribe de la forma:

$$R(g; f) = -1^{mn} R(f; g) \quad (24)$$

La anulación de $R(f; g)$ es la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones (11) y (12) tengan una raíz en común. [3]

Esta parte teórica se puede ejemplificar en el siguiente caso donde se requiere encontrar la resultante de dos polinomios $f(x, y), g(x, y)$. [4]

$$y = f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad (25)$$

$$y = g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0 \quad (26)$$

Al seguir las definiciones anteriores de la resultante $R(f; g)$ tenemos:

$$R(f; g) = a_0^2 (b_0 \alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 + b_2) (b_0 \alpha_2^2 + b_1 \alpha_2 + b_2) \quad (27)$$

Desarrollando (27) tenemos:

$$R(f; g) = a_0^2 [b_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + b_0 b_1 (\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2) + b_0 b_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + b_1^2 \alpha_1 \alpha_2 + b_1 b_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + b_2^2] \quad (28)$$

Empleando el teorema fundamental de las funciones simétricas [2] [5], podemos escribir las siguientes igualdades simétricas que relacionan las raíces α_n (13) y los coeficientes enteros a^m (17):

$$\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 = a_2^2 \quad (29)$$

$$\alpha_0^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) = -a_1 a_2 \quad (30)$$

$$\alpha_0^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = a_1^2 - 2a_0 a_2 \quad (31)$$

$$\alpha_0^2 \alpha_1 \alpha_2 = a_0 a_2 \quad (32)$$

$$\alpha_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = -a_0 a_1 \quad (33)$$

Se utiliza (29), (30), (31), (32), (33) en (28) para eliminar[1] α_n , quedando de la siguiente manera:

$$R(f; g) = a_2^2 b_0^2 + a_0^2 b_2^2 - 2a_0 a_2 b_0 b_2 - a_0 a_1 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_0 b_1 + a_1^2 b_0 b_2 + a_0 a_2 b_1^2 \quad (34)$$

La resultante (34) parece ser una expresión muy compleja, pero en realidad no lo es. Se puede observar que ahora únicamente está en función de los coeficientes enteros de las ecuaciones iniciales.

Al simplificar (34) la podemos reescribir como:

$$R(f; g) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (35)$$

Se observa que (35) es una expresión para un sistema de ecuaciones con las características de (25) y (26), es decir, análogamente se pueden calcular de esta manera expresiones que nos ayuden a calcular las resultantes en distintos sistemas con variables elevadas a determinadas potencias.

III. CONCLUSIÓN

Se concluye en (24) que la anulaci3n[1] de $R(f; g)$ es la condici3n necesaria y suficiente para que las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ tengan una ra3z en com3n si solo si no sean $a = 0$ y $b = 0$ al mismo tiempo.

Tambi3n se observa, que con procesos similares a la obtenci3n de (35) se pueden hallar diversas expresiones con las cuales podamos resolver sistemas de dos ecuaciones con dos inc3gnitas.

REFERENCIAS

- [1] Botbol, N. (2012) Introducci3n a la teor3a de la eliminaci3n. Departamento de Matemáticas. Universidad de Buenos Aires. Argentina.
- [2] D3az, D. (2015) Funciones Simétricas. Universidad de La Laguna. Espa3a.
- [3] Uspensky, J. V. (1997) Teor3a de Ecuaciones. LIMUSA. M3xico, D.F.
- [4] Potapov, M., Alexandrov, V., Pasichenko, P. (1980). Álgebra y análisis de funciones elementales. Editorial MIR. URSS.
- [5] Kurosch, A.G. (1968). Curso de Álgebra Superior. Editorial MIR. URSS.

Diseño de un modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo propone el diseño de un modelo de regresión de onda pura sinusoidal para un inversor eléctrico utilizado en sistemas fotovoltaicos desconectados de las compañías eléctricas utilizando para su adaptación un algoritmo de aprendizaje máquina (machine learning) y su simulación en Python con Anaconda.Navigator utilizando el editor de análisis de datos Jupyter; mismo que puede ser embebido en un procesador de señales digitales (DSP) o microcontrolador-DS para que pueda aprender mediante un entrenamiento de la señal analógica emitida por su convertidor digital analógico(DAC) para lograr una inversión de corriente directa a alterna con una forma de onda modulada correcta al standard de México 110V-60 Hertz.

Palabras Clave- modelado matemático, series de tiempo, onda sinusoidal, machine learning, inteligencia artificial.

Abstract- This article proposes the design of a pure sine wave regression model for an electric inverter used in photovoltaic systems disconnected from electric companies using a machine learning algorithm for its adaptation and its simulation in Python with Anaconda.Navigator using the Jupyter data analysis editor; this system can be embedded in a digital signal processor (DSP) or DS-microcontroller to learn by training the analog signal emitted by its digital analog converter (DAC) to get an inversion of direct current to alternating current with a form of modulated wave correct to the standard of Mexico 110V-60 Hertz.

Keywords- mathematical modeling, time series, sine wave, machine learning, artificial intelligence.

Mathematical Subject Classification: 78-10, 68T05

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas fotovoltaicos se encuentran formados por distintos componentes que permiten transformar a los fotones emitidos por el sol en electricidad; el proceso comienza con los paneles fotovoltaicos que transforman en voltaje el fotón que es almacenado en baterías ya que se desgastaría y en momentos con baja o nula captación solar no podrían suministrar el amperaje requerido para una carga. Una vez almacenado el voltaje en las baterías se utiliza un controlador de carga para evitar que se utilice más de un porcentaje de batería mínimo para que su tiempo de vida se prolongue al máximo; aprobado el voltaje de las baterías por el controlador la carga, la corriente directa (C.D.) fluye hacia el inversor de corriente para emitir una onda pura sinusoidal de corriente alterna (C.A.) para alimentar una carga[1] como se muestra en la figura 1.

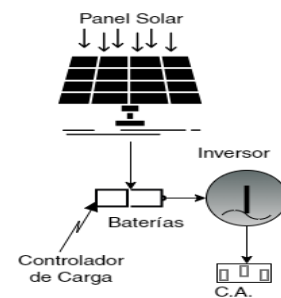


Fig 1. Esquema de un sistema fotovoltaico con el inversor de onda pura.

Actualmente un inversor de onda pura sinusoidal de 5000W se encuentra por encima de 203 dólares[2], debido a la complejidad de la generación de señal y sus variaciones; por lo que se implementan varias tecnologías de compensación como filtros, convertidores digitales a analógicos (DAC) y compensadores digitales, microcontroladores con procesadores digitales de señales (DSP) y condensadores.

Para diseñar un sistema convertidor simple se puede hacer uso de un Multivibrador Astable/Monostable como lo es el CD4047[3] el cuál utiliza un capacitor entre los pines 1 y 3; y una resistencia entre 2 y 3 para el ancho de pulso modulado (PWM) de salida como Monostable y para situar la frecuencia en el modo Astable como se describe en la figura 2.

 Livewire - Professional Edition - [4047.lvw *]

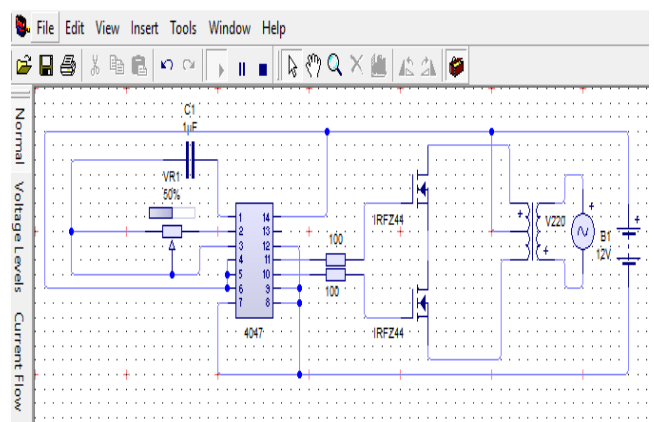


Fig 2. Simulación con convertidor simple con CD4047.

Una evolución compacta es el uso de microcontroladores para la generación de ondas PWM sinusoidales o DSP. A continuación se presenta una propuesta teórica de configuración de inversor con el término ω , el cual utiliza un microcontrolador 18F2550[4], el cual ha sido utilizado en distintas aplicaciones PWM como servocontrol[5].

El microcontrolador cuenta con puertos CCP (Captura/Comparación/PWM), los cuales permiten medir y controlar eventos. En modo “captura” adquiere el estado de un registro dinámico del temporizador; mientras que en “comparación” compara el valor del registro temporizador con otro y el modo PWM (Pulse Width Modulation) emite una señal con frecuencia-ciclo de trabajo programable. La señal PWM debe pasar por un filtrado pasa bajo resistencia-capacitor (RC) para formar la onda sinusoidal para dejar pasar los 60hz conectado a un amplificador operacional LM358[6] como acoplador de impedancia como se muestra en la figura 3.

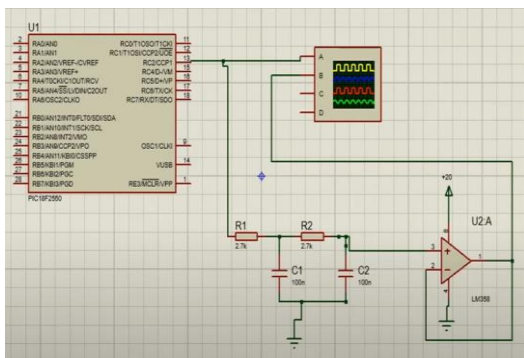


Fig 3. Simulación μ con PIC 18F2550 utilizando el puerto CCP .

La capacidad de que una máquina pueda aprender es un hecho funcional utilizado actualmente en sistemas predictivos en redes sociales y marketing que permiten ofrecer una solución incluso antes de necesitarla, reconocimiento de objetos, clasificación, sumariación, agrupamiento o con softwares que utilizan el procesamiento de lenguaje natural, donde utilizando cadenas ocultas de Markov [7] “predicen” la palabra completa mientras es dictada por un humano.

El “machine learning” (aprendizaje máquina) es un término acuñado por Arthur Samuel en 1959 que define dicha técnica de inteligencia artificial (I.A.) como: “*Field of study that gives computers the ability to learn without being explicitly programmed*”[8]; una definición más analítica la brinda Tom Mitchell: “*A computer program is said to learn from experience E with respect to some class of tasks T and performance measure P, if its performance at task in T, as measured by P, improves with experience E*”[9].

Lo anterior implica que un sistema inteligente con machine learning (ML) cuya tarea T es la generación de una correcta onda sinusoidal mediante el circuito descrito anteriormente con un sistema de retroalimentación intentaría formar la onda fallando; pero aproximándose en cada intento obteniendo una experiencia E respecto a cada intento que es almacenado como datos en la memoria; el desempeño P es evaluado con el resultado deseado incrementándose en cada intento aproximándose cada vez más al máximo desempeño al repetir la tarea T n veces, por lo que al incrementar la experiencia E , también será el desempeño P , logrando una mayor precisión ante la tarea T .

De ésta forma el sistema artificial se encuentra aprendiendo sin la necesidad de ser programado.

Lo anterior es útil debido a las variaciones de carga de los componentes en los filtros, por lo que al poder utilizar resistencias y capacitores regulables por el sistema, éstos tomarían los valores para el filtrado y la formación de onda solicitado sin tener que enseñarle, ya que al contar con el método heurístico de prueba y error; éste cuenta con la inteligencia suficiente para trabajar y alimentarse con la información que queremos de él, procesando los datos y prediciendo una salida correcta.

Un modelo ML es un sistema basado en preguntas y respuestas que se encarga de evaluar el desempeño de las tareas; éstos modelos utilizan los algoritmos de regresión, clasificación, agrupamiento, asociación y otros de reconocimiento de patrones como de anomalías, secuencias, dimensiones y recomendaciones basadas en comportamientos de los usuarios mediante minería de datos.

II. MODELO MATEMÁTICO DE REGRESIÓN DE ONDA PURA SINUSOIDAL PARA EL INVERSOR DE CORRIENTE

Los conocimientos y aplicaciones de las matemáticas informales, particularmente la trigonometría se remonta desde los Babilónicos y Egipcios a Grecia donde Hiparco de Nicea fue uno de los principales desarrolladores la rama, conocido como el padre de la trigonometría, quien además construyó unas tablas para la resolución de triángulos planos que fueron la base para las funciones trigonométricas que se conocen en la actualidad[10]. Georg Joachim Rheticus Müller -conocido como “Regiomontanus”- definió en su obra “*De Triangulis Omnimodis*” el seno y coseno; así como las seis funciones trigonométricas como razones entre lados de triángulo, sin recibir sus nombres actuales pero pueden ser fácilmente reconocidos.

En tiempos posteriores[10] se modernizó la trigonometría con aportes de Isaac Newton; así como Leonhard Euler quien introdujo la notación que se conoce en la actualidad de las funciones trigonométricas[10].

De acuerdo con el teorema 20[11] de Müller en su obra *De Triangulis Omnimodis* (traducida como “*On Triangles*”), libro I de 1464, descrito en Huges en 1967, en todo triángulo rectángulo, si uno de sus ángulos agudos está en el centro de un círculo ($\angle A$) y cuya hipotenusa es el radio (AB), el lado que subtiende ese ángulo agudo (BC) opuesto al ángulo ($\angle BAC$) es el seno del arco BE que subtiende al ángulo dado, como se muestra en la figura 4.

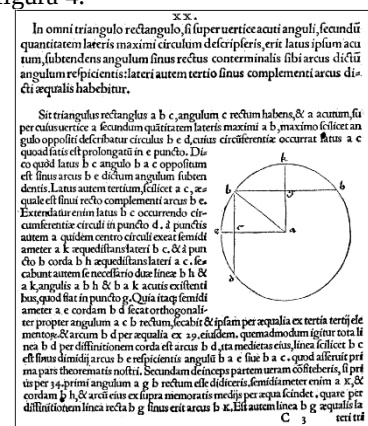


Fig 4. Teorema 20 del Libro I Triangulis Omnimodis. Fuente: Hughes, 1967, p. 58.

La razón seno se denota en la traducción de Hughes, 1967, p.58[11] quedando reconocible claramente; sin los términos modernos: $\text{sen } \theta = \frac{C.O.}{Hip.}$.

Definición 1:

Una regresión es una aproximación estadística que modela la relación entre los datos adquiridos denominados variables independientes con respecto a la salida de variables dependientes.

El objetivo del sistema consiste en predecir el valor de salida utilizando los valores de entrada multiplicándolos por sus coeficientes óptimos.

Definición 2:

Una regresión Y [12] es lineal para una variable de salida dependiente y respecto a una serie de variables independientes X_i con una serie de estimaciones de parámetros lineales β a calcular con un error ϵ , dada por:

$$Y = \beta_0 + \sum \beta_i X_i + \epsilon_i \quad (1)$$

Definición 3:

Una regresión lineal Y [12] es simple[13] cuando utiliza una única variable independiente X .

$$Y = \beta_0 + \beta_i X + \epsilon_i \quad (2)$$

Definición 3:

Una regresión lineal Y [12] es múltiple[13] cuando utiliza varias variables independientes X_i .

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon \quad (3)$$

Definición 4:

Una regresión Y [12] es polinómica[13] cuando utiliza una variable independiente de entrada X afectada por exponentes con coeficientes de entrada β :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_n X^n \quad (4)$$

Definición 5

Con base al modelo [12] se diseñó el modelo de regresión siguiente. Sea Y la función sinusoidal del inversor ϖ cuando utiliza una variable independiente de entrada X que es la frecuencia angular en $[rad/s]$ afectada por un cambio ángulo de fase φ (desfase), un cambio de fase vertical ϕ , un periodo de un solo ciclo $p=1$, una longitud de ciclo dada por $B = \frac{2\pi}{p}$ y una amplitud A de la forma:

$$Y = A \sin(B(X + \varphi)) + \phi \quad (5)$$

El periodo $T[s]$ y la frecuencia, $f[Hz]$ de (5) se encuentran dadas por [13]:

$$T = \frac{1}{f} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) con X de (5) se obtiene:

$$T = \frac{2\pi}{X} \quad (7)$$

Definición 6:

La suma de dos funciones separables es:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \quad (8)$$

En la siguiente identidad se cumplen las variables arbitrarias $p, q, r \leftrightarrow \sin(p - q) \neq 0$.

Al ser una diferencia de variables, sólo dos pueden ser independientes por unicidad atómica y una puede introducir dos parámetros adicionales que serán los cambios de fase que permitirían describir los flancos positivos y negativos.

Lema 1.

Sea la función $Y = \sin(x)$ [13] que satisface a:

$$\sin(A + B) = \frac{\sin(A) \sin(B+q-p)}{\sin(q-p)} + \frac{\sin(A+p-q) \sin(q)}{\sin(p-q)} \quad (9)$$

$$\forall A, B, p, q | (p - q) \neq 0 \wedge \sin(q - p) \neq 0 \quad (10)$$

La siguiente demostración por deducción da prueba de la función seno[13] de la suma (8).

Demostración 1:

Sea $c(x) = \cos(x)$; $r = q - p$, utilizando la identidad trigonométrica (8) y las variables arbitrarias A, B se puede obtener:

$$\frac{\sin(B)}{\sin(-r)} [\sin(B)c(r) + c(B)\sin(r)] + \frac{\sin(B)}{\sin(-r)} [\sin(A)c(-r) + c(A)\sin(-r)] \quad (11)$$

Asumiendo que:

$$\sin(x) = 2 \cdot n - 1.n; \quad c(x) = 2 \cdot n.n \quad (12)$$

Al desarrollar se obtiene:

$$\sin(A) c(B) + c(A) \sin(B) \quad (13)$$

Sustituyendo a (12) con los términos de coseno se obtiene:

$$\sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B) \quad (14)$$

Que es idéntica a (8) $\sin(A + b)$ ■

Demostración 2

Utilizando la definición 5 se tiene que la ecuación $Y = A \sin(B(X + \varphi)) + \phi$ (5) y que cuenta con la estructura de (8) que al utilizar la estructura (11) con los parámetros descritos en (5) se obtiene una ecuación similar a (14):

$$A \sin(B(X + \varphi)) + \phi = \frac{A \sin(B\varphi)}{A \sin(-r)} [\sin(B\varphi) \cos(r) + \cos(X\varphi) \sin(r)] + \frac{A \sin(B\varphi)}{A \sin(-r)} [A \sin(BX) \cos(-r) + A \cos(BX) \sin(-r)]$$

Que se comporta similarmente a (14) y a la identidad trigonométrica (8) y cumple con la definición 6.

Por lo tanto sustituyendo (5) en (14) se obtiene la siguiente identidad:

$$A \sin(B(X + \phi)) + \phi = A \sin(BX) \cos(B\phi) + A \cos(BX) \sin(B\phi) + \phi \quad (15)$$

Definición 6:

Sea SSR (*Squares due to Squares of Regression*) la suma de los cuadrados residuales que mide el nivel de varianza dentro del término error o residuos del modelo[12]; es decir la cantidad de errores restantes entre la función de regresión y el conjunto de datos, después de ejecutar el modelo permitiendo determinar qué tanto el modelo de regresión lineal se ajusta (aproxima) a los datos en el modelo, respecto a cuan pequeña es SSR.

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (16)$$

Donde:

$\hat{y}_i$ es el i ésimo valor estimado del parámetro a predecir.
 $\bar{y}$ media de los datos del parámetro a predecir.
 n es el límite superior de la sumatoria.

Definición 7:

Sea SEE (*Sum of Squares of Regression Error/Residuals*) la sumatoria total del cuadrado de los errores residuales[12] como:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 \quad (17)$$

Donde:

e^i es el i ésimo valor de error.
 n es el límite superior de la sumatoria

Definición 8:

Sea TSS (*Total Sum of Squares*)[12] la sumatoria total de la sumas de SSR(16) y SSE(17) dado por:

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (e_i)^2 \quad (18)$$

Donde:

y^i es el i ésimo valor a predecir.
 $\bar{y}$ media de los datos del parámetro a predecir.
 n es el límite superior de la sumatoria

Definición 9:

Sean b_x parámetros a estimar como coeficientes de regresión[12]. b_0 será la interceptación (valor medio estimado de Y cuando $X = 0$); mientras que b_1 es denominado el valor pendiente que indica el cambio de Y respecto al promedio cuando $X + 1$.

Demostración 3:

Reescribiendo e igualando (16) y (17) en (18) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y} + y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (19)$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + (y_i - \hat{y}_i)^2 + 2[(\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i)]] \\ &= (SSR + SSE) + [2 \sum_{i=1}^n \{(\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (SSR + SSE) + [2 \sum_{i=1}^n \{(\hat{y}_i - \bar{y})(e^i)\}] \\ &= (SSR + SSE) + [2 \sum_{i=1}^n \{(b_0 + b_1 x_i - \bar{y})(e^i)\}] \\ &= (SSR + SSE) + [2b_0 \sum_{i=1}^n e^i + 2b_1 \sum_{i=1}^n \{x_i e_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n e^i\}] = (SSR + SSE) \end{aligned} \quad (20)$$

Por lo tanto:

$$SSR = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - b_0 - b_1 \bar{x})^2 = b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (21)$$

De (21) se puede igualar a la unidad como:

$$1 = \frac{SSR}{TSS} + \frac{SSE}{TSS} \quad (22)$$

Que describe la proporción de la suma total de los cuadrados que pueden ser producidos por X .

Donde:

$\frac{SSR}{TSS}$ describe la proporción de la suma total de los cuadrados que pueden ser producidos por X .

$\frac{SSE}{TSS}$ describe la proporción de la sumatoria de los cuadrados generada por el la aleatoriedad.

Definición 9:

Sea R^2 el coeficiente de determinación definido en el intervalo $0 \leq R^2 \leq 1$ que permite medir qué tan bien un modelo estadístico predice una resultado respecto a la proporción de la variación en la variable dependiente Y predecible de las independientes X [12] descrita como:

$$R^2 = \frac{SSR}{TSS} = 1 - \frac{SSE}{TSS} \quad (23)$$

Donde se interpreta que:

$$R^2 = \begin{cases} 0 = & \text{No predice el resultado} \\ 0 < R^2 < 1 = & \text{Predice parcialmente} \\ 1 = & \text{Predice totalmente} \end{cases}$$

El coeficiente de correlación r entre las variables de entrada y salida viene dada por:

$$1 = \frac{SSR}{TSS} = \frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (24)$$

III. SIMULACIÓN DE MODELO DE REGRESIÓN DE ONDA PURA SINUSOIDAL PARA INVERSOR ELÉCTRICO MEDIANTE MACHINE LEARNING.

Para la programación se seleccionó Python 3 con ipynbkernel mediante Anaconda.Navigators utilizando el editor de análisis de datos Jupyter.

El lenguaje cuenta con librerías de cómputo de matriz n -dimensional como Numpy, Scipy para algoritmos numéricos como procesamiento de señales y optimización, Matplotlib para graficación y Scikit-learn para lograr el machine learning propuesto con los algoritmos de regresión descritos anteriormente.

Para lograr optimizar el ajuste de curva se hizo uso de Scipy en su función `curve_fit` que utilizará los valores creados

de las matrices Numpy tanto de la variable independiente x como de la dependiente para ajustarse a la ecuación (5).

Para el coeficiente de determinación R^2 descrito en (6) se utilizó la función `r2_score` de `sklearn.metrics` el cual utiliza la constante `y_true` para un R^2 de valores no finitos.

Para generar una serie de datos se definen las variables de (5) para calcular la función regresión sinusoidal de la forma (x,a,b,c,d) quedando:

$$Y = A \cdot \sin(B(X + C)) + D$$

Donde:

A = Amplitud

$\text{Periodo} = 1$

B = Longitud del ciclo

C = Cambio de fase

D = Cambio de fase vertical

A continuación se crea una función para generar números espaciados uniformemente y 100 muestras espaciadas uniformemente calculadas sobre el intervalo de 0 a 1 con 100 de la variable X de (5).

```
X = np.linspace(0,1,100) #(Start,End,Points)
```

Los valores de inicio utilizando (5) y tomando en cuenta la longitud del periodo para B son:

```
A = 1
B = 2*pi
B = 2*pi/Periodo
Periodo = 1
C = 0
D = 0
```

La salida Y de (5) se genera un seno trigonométrico con los parámetros de la matriz cuyo ángulo está dado en radianes dada por $\text{seno}(2\pi X)$ para una onda completa mediante:

```
Y = 1*np.sin(2*np.pi*X)
```

El ruido serán las señales obtenidas de la señal generada antes del aprendizaje del sistema, por lo que para la enseñanza se genera un ruido aleatorio de 100 datos del que se ajustará la onda pura con una constante de 0.4 para brindar un espaciado mínimo entre cada punto:

```
Ruido = 0.4*np.random.normal(size=100)
```

El ruido es agregado a la salida Y e impresa en una primera gráfica que será el patrón a ajustar en color rojo mediante:

```
Y_data = Y + Ruido
plt.scatter(X,Y_data,c="r")
```

Una vez creada la función `calc_sine` para lograr una salida basada en los coeficiente óptimos procedemos a obtener los parámetros óptimos descrita en la figura 5.

Para calcular el valor de la senoide (5) de la forma x,a,b,c,d se declara y regresa el valor dado por una descripción amplia con base al modelo (5) mediante la función:

$$\text{Amplitud}[\text{Sen}(\frac{2\pi}{\text{periodo}}(x+\text{rad}\phi))] + \phi \quad (25)$$

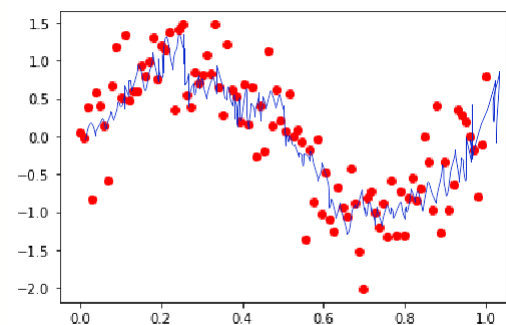


Fig 5. Iteración de una simulación de la señal con valores aleatorios teóricos con base a datos experimentales realizados con el simulador Proteus para el inversor de onda INV .

```
def calcula_seno(x,a,b,c,d):
    return a * np.sin(b* ( x + np.radians(c))) + d
```

Se procede a encontrar los parámetros óptimos de ajuste de curva a almacenarse en parámetros optimizados de la función con los parámetros óptimos en `popt` y la covarianza entre cada parámetro en `pocv`.

```
popt,pcov = curve_fit(calcula_seno,X,Y_data)
```

Se genera un gráfico con los datos indicados graficando la curva óptima:

```
plt.scatter(X,Y_data)
plt.plot(X,calcula_seno(X,*popt),c="r")
plt.show()
```

Se revisa la precisión mediante el coeficiente de determinación R^2 para la regresión lineal para conocer qué tan aproximados se encuentran los datos de la línea de regresión ajustada imprimiendo el resultado como se describe en la figura 6.

```
Precision1 =r2_score(Y_data,calcula_seno(X,
*popt))
print (Precision1)
```

Para el cómputo del valor de la función que calcula el valor de la línea y regresa:

$$\frac{2\pi}{\text{periodo}} + Xm \quad (26)$$

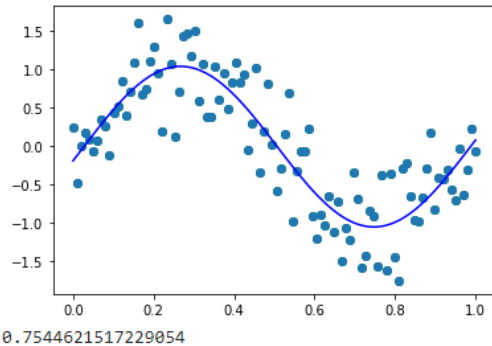


Fig 6. Iteración de una simulación generada en Python para la curva óptima con R^2 para $\mathbb{N}$.

```
def calcula_linea(X,m,b):
return b + X*m
```

Una vez calculado se procede a regresar los parámetros optimizados de la función con parámetros óptimos en popt y covarianza entre cada parámetro en pcov.

```
popt,pcov = curve_fit(calcula_linea,X,Y_data)
```

Para graficar los datos principales se realiza:

```
plt.scatter(X,Y_data)
```

De igual forma se grafica el mejor ajuste de la línea:

```
plt.plot(X,calcula_linea(X,*popt),c="r")
plt.show()
```

A continuación se realiza la precisión del modelo mediante el coeficiente de determinación R^2 de regresión ajustada imprimiendo el resultado descrito en la figura 7.

```
Precision1 =r2_score(Y_data,calcula_linea(X,*
popt))
print ("Precisiyn de modelo lineal: ",Precision1)
```

Una descripción del algoritmo utilizado por el modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning utilizando Python se describe en la figura 8.

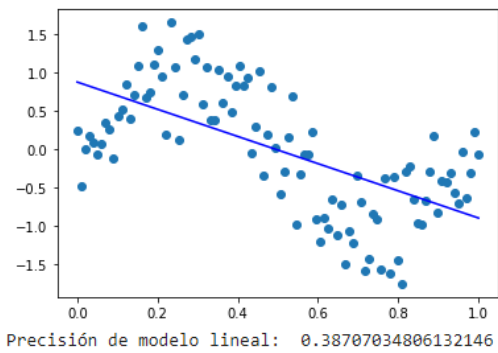


Fig 7. Iteración de una simulación en Python de una que indica la precisión del modelo lineal al utilizar las iteraciones de aprendizaje del sistema de machine learning para $\mathbb{N}$.

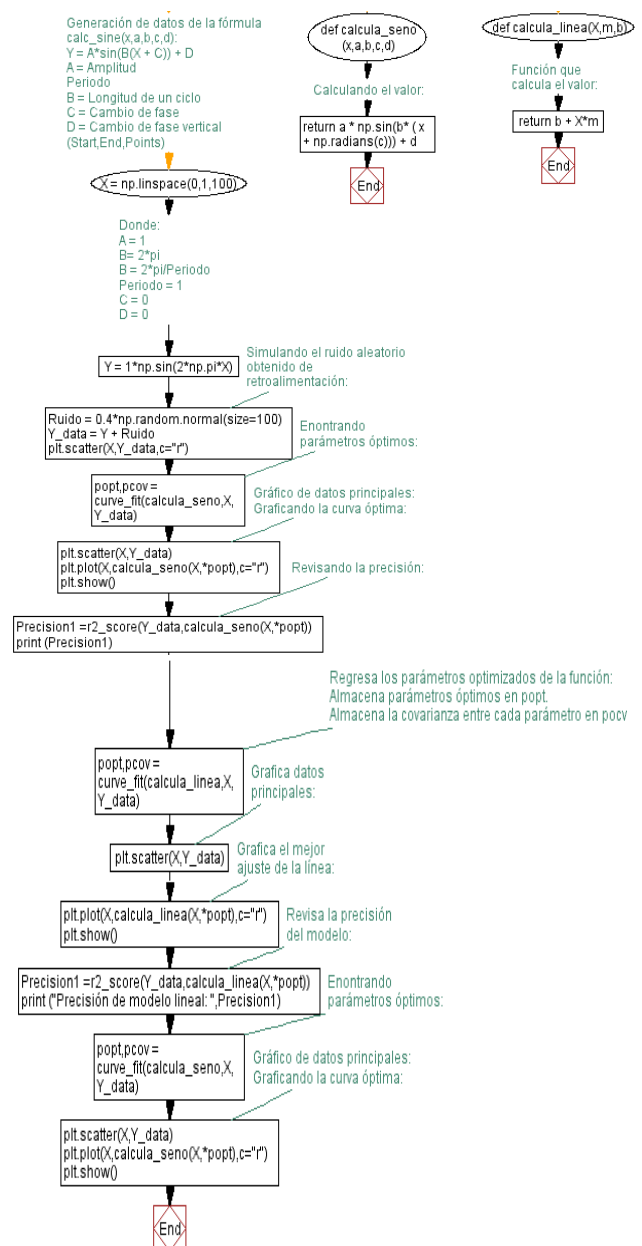


Fig 8. Algoritmo en Python del modelo de regresión de onda pura sinusoidal para inversor eléctrico mediante machine learning.

IV. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Respecto a los resultados de las identidades, es posible extender la demostración de identidad para suma polinómica y similares para cuando la función $y = \sum_{j=1}^n x_j \mid y = \sin^2(x), \cos(x), \cos^2(x)$. Una acotación más extendida de su estudio se puede revisar en Rassias-Simsa[14].

Se puede observar en el desarrollo que R^2 permite describir el ajuste sólo respecto al rango indicado por lo que se debe ajustar para niveles superiores cuando se hagan mediciones para no errar.

Se debe observar que R^2 solo sirve para interpretar las relaciones lineales.

$R^2 = 0$, no necesariamente indica que no exista una correlación entre la variable de entrada y salida.

En el presente modelo matemático se pudo observar que el uso de las técnicas descritas permite ajustar los datos de salida de un inversor de C.D. a C.A. respecto a los esperados.

Al comparar las figuras 5 y 7 se puede observar como los picos y valores aleatorios se han podido ajustar a una senoide con la amplitud, frecuencia de 60 Hertz y periodos establecidos en la simulación em Python.

El modelo puede ser migrado a lenguaje CSS para ser embebido en un microcontrolador PIC 18F2550 en donde sea medida la salida para lograr un sistema de lazo cerrado con ML.

El costo de producción de éste tipo de sistemas con un amplificador como el LM385, filtros y sistemas de potencia no deberá superar los 100 dólares.

REFERENCIAS

- [1] N. Pearsall “*The Performance of Photovoltaic (PV) Systems: Modelling, Measurement and Assessment*”. USA: Elsevier, 2017, p.p. 40-82.
- [2] <https://www.mak-powersis.de/inv-series-5000-watt-inverter.html> accedido el 12 de mayo de 2022.
- [3] <https://www.ti.com/product/CD4047B> accedido el 16 de mayo de 2022.
- [4] <https://www.microchip.com/en-us/product/PIC18F2550> accedido el 16 de mayo de 2022.
- [5] M. Fajardo-Rendón, y F.G. Herrera-Armendia, “*Servocontrolador Reprogramable para Articulaciones Robóticas USB HID*”, Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE. 2013, Cuernavaca, Morelos, México: IEEE international, 2013.
- [6] <https://www.ti.com/product/LM358> accedido el 16 de mayo de 2022.
- [7] A. A. Markov “*Investigation of the general case of trials associated into a chain*”, Zapiski. Akad. Nauk, St. Petersburg: Fiz.-Matem, 1910, p.p. 33.
- [8] A. L. Samuel “*Some studies in machine learning using the game of checkers*”. USA: IBM Journal of research and development, 3(3), 210-229, 1959.
- [9] Tom Mitchell “*Machine Learning*”, USA: McGraw Hill, p.1, 1997.
- [10] G. V. Brummelen “*The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*”, USA: Princeton University Press, 2009.
- [11] G. J. R. Müller “*De Triangulis Omnimodis*”(1533), Trad. “*On Triangles: Book I*” Editado por: Hughes, University of Wisconsin Press p.p.58-59, 1967.
- [12] K. Metzler “*The SAGE Handbook of Regression Analysis and Causal Inference*”, London: SAGE Publications Ltd, p.57,63-79 2015.
- [13] L. Fahrmeir, T. Kneib, S. Lang and B. Marx “*Regression Models, Methods and Applications*”, Berlin Heidelberg:Springer-Verlag, p.22, 2013.
- [14] H. M. Rassias and Jaromir Simá. “*Finite sums decompositions in mathematical analysis. Pure and Applied Mathematics*”, Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1995.

Fractal lineal cruz y modelos de probabilidad en estadística circular, para educación y seguridad ciudadana.

Isa Massa, Fernando Gustavo

FRT-UTN Universidad tecnológica nacional – Facultad Regional Tucumán.
Moreno 935, San Miguel de Tucumán- Tucumán, Argentina
ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- La educación como sabemos es el eje del crecimiento y desarrollo; y de una verdadera humanidad. El fractal cruz es un modelo de geometría fractal, que se usa para derivar datos discretos, y encontrar junto a un nuevo modelo de estadísticas circulares; la probabilidad de uniformidad de la serie de datos. También útil en la predicción de la continuación de la serie de datos. El segundo modelo denominado estadística circular es demostrado con integrales y límites y encuentra razón en la predicción de dramas sociales como lo son: la violencia contra las mujeres, la delincuencia, la trata de personas y secuestro extorsivo.

Palabras Clave- educación, estadística circular, fractales, seguridad ciudadana

Abstract- Education as we know is the axis of growth and development; and a true humanity. The cross fractal is a fractal geometry model, which is used to derive discrete data, and find together with a new circular statistical model; the probability of uniformity of the data series. Also useful in predicting the continuation of the data series. The second circular statistical model is demonstrated with integrals and limits and finds reason in the prediction of social dramas such as: violence against women, crime, human trafficking and kidnapping for extortion.

Keywords- education, circular statistics, fractal, citizen security.

Mathematical Subject Classification: 46N30,28A80

I. INTRODUCCIÓN

Se demuestra matemáticamente con ayuda de un nuevo fractal, la derivada de datos discretos y sus implicancias en distintas áreas, entre ellas, la educación para colaborar de esa manera al crecimiento científico y tecnológico y aportar al crecimiento uniforme de los pueblos. Estas demostraciones son ayudadas con corolarios, para una correcta interpretación.

Los modelos de estadística circular: el primero refuerza la predicción y el segundo es demostrado con integrales y límites.

II. TEOREMAS

A – Teorema fractal cruz y derivada de datos discretos

Si existe un eje de coordenadas cartesianas y deducibles en el círculo, entonces el fractal lineal que corta en dos sus ejes de abscisas en forma de auto similitud y con dimensión fractal es la derivada de datos discretos de cada dato que se origina de otro dato dentro del círculo y el fractal cruz.

Demostración

Veamos las condiciones necesarias y suficientes de los fractales lineales que son la auto similitud y la dimensión fractal. La auto similitud se demuestra en forma gráfica en su repetición estadística y la dimensión pasamos a calcularla a continuación:

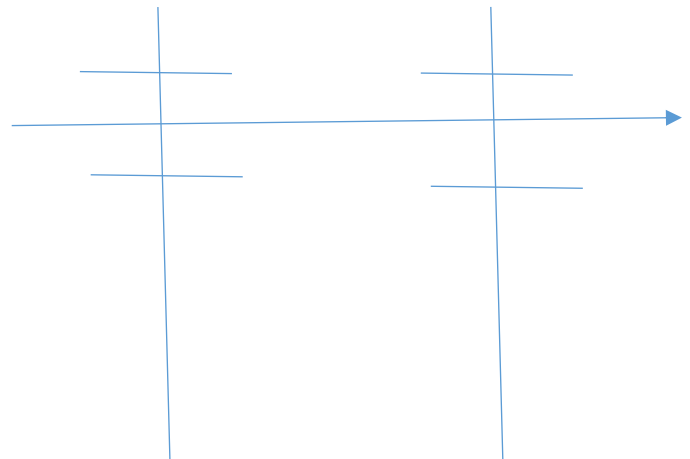


Fig. 1 Autosimilitud

Definiciones de Euclides referidas a la demostración

Definición 10

Usando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es recto, y la recta que está sobre la otra se llama perpendicular a la otra recta.

Definición 11

Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.

Definición 12

Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.

El eje de coordenadas cartesianas es dividido en dos en cada uno de los ejes de las abscisas, una y otra vez cambiando o rotando la orientación en 90° .

Euclides plantea 5 nociones comunes:

1. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.(la propiedad transitiva de una relación euclidiana).
2. Si a cosas iguales añadimos cosas iguales, las totales son iguales.(La propiedad de la suma de la igualdad).
3. Si a cosas iguales quitamos cosas iguales, los restos son iguales.(Propiedad de igualdad de la resta).
4. Las cosas que se superponen son iguales.(propiedad reflexiva)
5. El todo es mayor que la parte.

De esta manera se demuestra la auto similitud en forma gráfica (Euclides. Libro 1).

La dimensión fractal pasamos a demostrar.

$N = F^d$ [5]

N: Número de copias

F: Factor de reducción

D: Dimensión

En nuestro fractal tenemos 3 copias y el factor de reducción es 2 cortes

$$3 = 2^d$$

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$D = 1,584962$$

Por lo tanto, demostramos que es una dimensión fractal al ser un valor no entero.

Definición de fractal lineal: Los fractales lineales son aquellos que se construyen con un cambio en la variación de sus escalas, es decir, son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito (auto similitud). Son curvas lineales y con una dimensión no entera.

B – Teorema de test de estadística circular

Si existe una serie de datos en el círculo con una cantidad limitada de estos datos y valores con una distancia matemática entre lo observado y lo esperado, entonces la probabilidad en el círculo de esta serie de datos es (E_i es la esperanza matemática):

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O_1 - \sin E_1}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{\sin O_2 - \sin E_2}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin O_n - \sin E_n}{\sin O_n} \right) \right) / k \quad (1)$$

Demostración

Extremos relativos

Sin $E_i = 0$

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O_1 - 0}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{\sin O_2 - 0}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin O_n - 0}{\sin O_n} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - \left(\frac{\sin O_2}{\sin O_2} + \frac{\sin O_2}{\sin O_2} + \dots + \frac{\sin O_n}{\sin O_n} \right) / k$$

Numerador y denominador iguales entonces cociente igual 1

$$P_r = 1 - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=k} / k$$

$$P_r = 1 - k/k$$

$$P_r = 0$$

Si la distancia entre lo observado y lo esperado tiende a $\pi/2$, entonces se espera una probabilidad baja y es porque esta distancia es alta. Esto es debido a que $\sin E_i = 0$ y $E_i = 0$, entonces $O_i = \pi/2$ y su distancia Euclidiana es $\pi/2$.

Sin $E_i = 1$

Entonces Sin $O_i = 1$

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{0}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{0}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{0}{\sin O_n} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - 0 = 1$$

Si la distancia entre lo observado y lo esperado es mínima o tendiendo a cero, entonces la probabilidad es alta porque los datos están cercanos entre si

Debe tenerse en cuenta que $\sin E_i \geq \sin O_i$ para todo i

$$0 \leq P_r \leq 1$$

$$0 \leq E_i \leq 2\pi$$

$$0 \leq O_i \leq 2\pi$$

$$O_i \neq 0, \pi, 2\pi$$

Corolario 1

El límite de la probabilidad que tiende a $\pi/2$ es 1

$$\lim_{O_i, E_i \rightarrow \pi/2} P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) + \left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) \right) / k$$

$$= 1$$

Entonces se demuestra que para el fractal es concebible el giro de $\pi/2$ hacia su derecha o hacia su izquierda, ya que su probabilidad tiende a la certeza

Corolario 2

Demostrar derivada de datos discretos en fractal con la ayuda de probabilidad de estadística circular
Proponemos un valor constante y sin cambios para Ei

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{1-x}{1} \right) + \left(\frac{1-x}{1} \right) + \dots + \left(\frac{1-x}{1} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - (k - k \cdot x) / k$$

$$P_r = 1 - (1 - x)$$

$$P_r = x$$

Por lo tanto, no hay variación o cambio con datos constantes, pero si los valores de Ei u Oi son variables podemos esperar una derivada de datos discretos en el fractal cruz.

Corolario 3

Si la probabilidad en forma de test tiene un punto de inflexión, este será

Demostración [3]

Oi es la variable

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O1 - \sin E1}{\sin O1} \right) + \left(\frac{\sin O2 - \sin E2}{\sin O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin On - \sin En}{\sin On} \right) \right) / k$$

Primera derivada

$$= \left(\left(\frac{\sin E1 \cdot \cos O1}{\sin^2 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \cos O2}{\sin^2 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \cos On}{\sin^2 On} \right) \right) / k$$

Segunda derivada

$$= \left(\left(\frac{\sin E1 \cdot \sin O1}{\sin^4 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \sin O2}{\sin^4 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \sin On}{\sin^4 On} \right) \right) / k$$

Igual a 0

$$0 = \left(\frac{\sin E1 \cdot \sin O1}{\sin^4 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \sin O2}{\sin^4 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \sin On}{\sin^4 On} \right)$$

Una suma de positivos iguales a cero se deduce que cada miembro de la suma es igual a cero, entonces cada numerador es igual a cero.

$$\left(\frac{\sin Ei \cdot \sin Oi}{\sin^4 Oi} \right) = 0$$

$$Oi = \pi/2$$

$$Ei = \pi/2$$

Por lo tanto concluimos que la máxima derivada de datos discretos en un punto de inflexión $\pi/2$, genera una rotación en 90° del eje hacia la derecha o izquierda.

C - Teorema modelo de estadística circular

Si el agrupamiento de datos en estadística circular con funciones senos y cosenos y con un valor mayor me da una probabilidad, entonces

$$P = \left(\left(\sum_{i=1}^{n1} \sin x_i - \text{MAX} \sin x_i \right) / (n1 - 1) \cdot \text{MAX} \sin x_i \right) + \left(\left(\sum_{i=1}^{n2} \cos y_i - \text{MAX} \cos y_i \right) / (n2 - 1) \cdot \text{MAX} \cos y_i \right) + \left(\left(\sum_{i=1}^{n3} \sin p_i - \text{MAX} \sin p_i \right) / (n3 - 1) \cdot \text{MAX} \sin p_i \right) + \left(\left(\sum_{i=1}^{n4} \cos z_i - \text{MAX} \cos z_i \right) / (n4 - 1) \cdot \text{MAX} \cos z_i \right)$$

$$P_a = \frac{P}{4}$$

$$0 < P_a < 1$$

Demostración 1 [13]

Primer cuadrante

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x_i \, dx_i = \frac{-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$$

Segundo cuadrante

$$\frac{1}{\cos \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y_i \, dy_i = \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \pi} = 1$$

Tercer cuadrante

$$\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin p_i \, dp_i = \frac{-\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi}{\sin \frac{3\pi}{2}} = 1$$

Cuarto cuadrante

$$\frac{1}{\cos 2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos z_i \, dz_i = \frac{\sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi} = 1$$

Demostración 2

Uso los extremos de límites

1 - Mayores extremos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n1} \sin x_i - \text{MAX} \sin x_i \right) / (n1 - 1) \cdot \text{MAX} \sin x_i = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\sum_{i=1}^{n2} \cos y_i - \text{MAX} \cos y_i \right) / (n2 - 1) \cdot \text{MAX} \cos y_i = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n3} \sin p_i - MAX \sin p_i)}{(n3 - 1) \cdot MAX \sin p_i} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\sum_{i=1}^{n4} \cos z_i - MAX \cos z_i)}{(n4 - 1) \cdot MAX \cos z_i} = 1$$

2 - Aplico límite a los extremos inferiores

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^{n1} \sin x_i - MAX \sin x_i)}{(n1 - 1) \cdot MAX \sin x_i} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación aplico L'Hopital de [4]

Y obtengo = 1

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n2} \cos y_i - MAX \cos y_i)}{(n2 - 1) \cdot MAX \cos y_i} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación aplico L'Hopital de [4]

Y obtengo = 1

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sum_{i=1}^{n3} \sin p_i - MAX \sin p_i)}{(n3 - 1) \cdot MAX \sin p_i} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación aplico L'Hopital de [4]

Y obtengo = 1

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(\sum_{i=1}^{n4} \cos z_i - MAX \cos z_i)}{(n4 - 1) \cdot MAX \cos z_i} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación aplico L'Hopital de [4]

Y obtengo = 1

Corolario 4

Una forma parecida a probabilidad de agrupamiento es de la forma

$$p = \frac{(\sum_{i=1}^{n1} \cos x_i - MAX \cos x_i)}{(n1 - 1) \cdot MAX \cos x_i} + \frac{(\sum_{i=1}^{n2} \sin y_i - MAX \sin y_i)}{(n2 - 1) \cdot MAX \sin y_i} + \frac{(\sum_{i=1}^{n3} \cos p_i - MAX \cos p_i)}{(n3 - 1) \cdot MAX \cos p_i} + \frac{(\sum_{i=1}^{n4} \sin z_i - MAX \sin z_i)}{(n4 - 1) \cdot MAX \sin z_i}$$

Donde cambio el orden de los senos y cosenos en cada cuadrante la probabilidad también se demuestra

$$P_a = \frac{p}{4} \\ 0 < P_a < 1$$

La razón por la que se llega a esto es por la naturaleza de los senos y cosenos, que varían entre 0 y 1, por lo tanto se espera que la probabilidad también se fluctúe entre 0 y 1 de P_a . No importa el orden en los cuadrantes.

Corolario 5

La probabilidad de agrupamiento es mayor cuando los datos se acercan a los ejes.

Corolario 6

La probabilidad de agrupamiento es mayor para datos cercanos o próximos entre si

III. DEMOSTRACIONES EN LA PRÁCTICA CON EJEMPLOS.

A - Educación para fractal cruz y derivada de datos discretos
Según [2] la violencia de la familia, entre otros detonantes, es crucial en la violencia social y escolar del niño o adolescente.

Hipótesis 1: La violencia en la vida del estudiante y sin importar su procedencia influye en su comportamiento.

Tabla I

Violencia y sus causas (2008-2009)

	Física	Verbal	Social
Familia	0,16	0,17	0,19

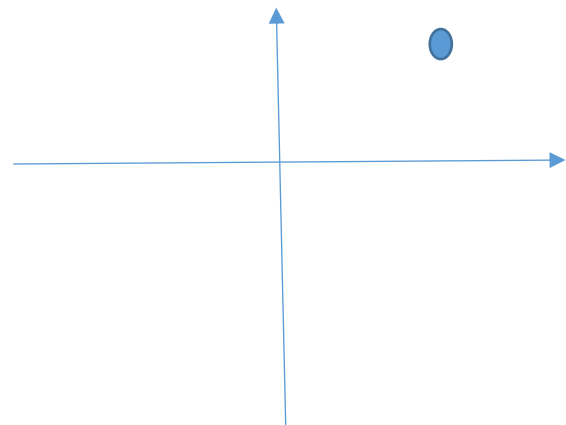


Fig. 2 Primera aproximación

$$(0,16 \cdot 360^\circ) / 1 = 57,6^\circ$$

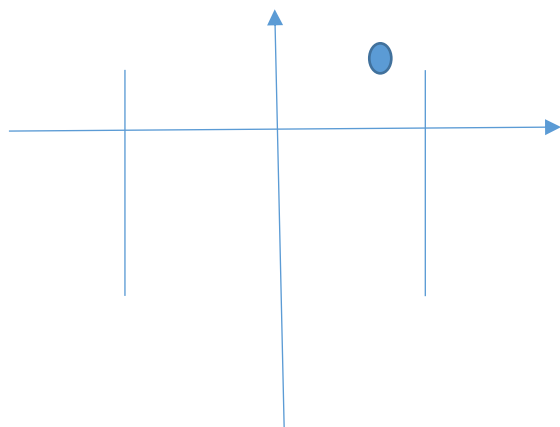


Fig. 3 Primera derivada 28°

Por (1)

$$P_r = 1 - ((\sin(57,6^\circ) - \sin(28^\circ)) / \sin(57,6^\circ)) / 1 = 0,55602$$

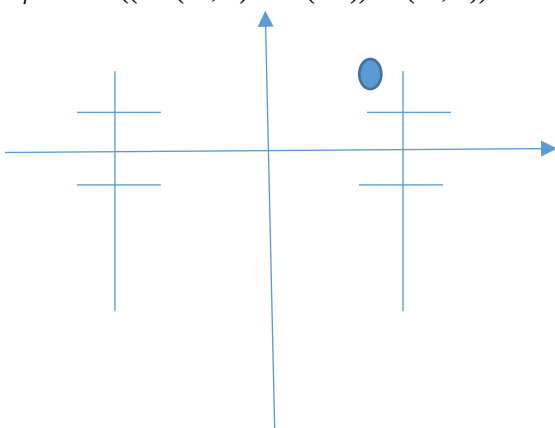


Fig. 4 Segunda derivada 104°

$$P_r = 1 - ((\sin(57,6^\circ) - \sin(28^\circ)) / \sin(57,6^\circ) + (\sin(104^\circ) - \sin(57,6^\circ)) / \sin(104^\circ)) / 2$$

$$P_r = 0,51993$$

Por los datos de la primera y segunda derivada y su probabilidad, podemos inferir que no existe evidencia empírica que rechace la hipótesis de que la violencia en sus distintos estamentos: física, verbal o social son indicadores de mal comportamiento de los niños y adolescentes en el colegio y socialmente.

Esto es debido a que no existe en el cálculo de las derivadas, distancia grande entre sus valores.

La relación existente entre la derivada de datos discretos y su probabilidad como función de demostración de la misma, es que esta derivada cambia de valor de cuadrante en cuadrante a medida que se van cortando los ejes en otros ejes con rotaciones de 90° hacia la derecha o izquierda y la función de probabilidad es una abstracción de dicha rotación al analizar los diferentes valores que se originan en los nuevos y antiguos cuadrantes ya que este modelo de probabilidad es de estadística circular.

B – Seguridad ciudadana

Simulación de la normal en Excel con números pseudo aleatorios en índice de criminalidad. Se considera una media de 67,24 para Perú y de 53,9 para México, sacado de [1]

Hipótesis 2: La delincuencia en Perú no variaría y se incrementa

Perú (Media= 0,6724 desvío 0,1)

$$0,6396995 = 230^\circ$$

$$0,62291511 = 224^\circ$$

$$0,72126241 = 259^\circ$$

$$0,64463975 = 232^\circ$$

$$0,47000335 = 169^\circ$$

$$(0,6396995 \cdot 360^\circ) / 1 = 230^\circ$$

$$P_a = ((\sin(230^\circ) + \sin(224^\circ) + \sin(232^\circ)) / (3 \cdot \sin(259^\circ)) + (\cos(169^\circ) / \cos(169^\circ))) / 2$$

$$P_a = 0,65365$$

Lo que sugiere una alta probabilidad de criminalidad en Perú, y debido a la cercanía de los datos en la simulación lo que sugiere un desvío pequeño. Entonces hipótesis convalidada

Hipótesis 3: La delincuencia en México no variaría y se incrementará

México (Media 0,539 desvío 0,1).

$$0,43290 = 155^\circ$$

$$0,59647 = 214^\circ$$

$$0,44993 = 162^\circ$$

$$0,64564 = 232^\circ$$

$$0,44931 = 161^\circ$$

$$P_a = ((\cos(155^\circ) + \cos(161^\circ)) / (2 \cdot \cos(162^\circ)) + (\sin(214^\circ) / \sin(232^\circ))) / 2$$

$$P_a = 0,84159$$

Entonces el índice de criminalidad en México se pronostica será más alto debido a un desvío pequeño en la serie de datos lo que conlleva a datos cercanos. Por lo tanto comprueba hipótesis.

C – Violencia contra las mujeres

Sobre un total de 63202 llamadas de urgencia por casos de violencia en Argentina, estos son los valores porcentuales por mes tomados en base a esa cifra total. Sacado de [12]

Hipótesis 4: La violencia contra las mujeres tendrá un alto incremento y se mantendrá en los valores promedios.

Tabla II

Casos de violencia en porcentaje sobre el total [12]

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Cifra	0,166	0,156	0,1916	0,1783

$$(0,166 \cdot 360^\circ) / 1 = 60^\circ$$

$$P_a = ((\sin(60^\circ) + \sin(56^\circ) + \sin(64^\circ)) / (3 \cdot \sin(69^\circ))) / 1$$

$$P_a = 0,92613$$

Por lo tanto la violencia contra las mujeres tiene una alta probabilidad de incrementarse y mantenerse cercanos los valores promedios por mes. La hipótesis se comprueba.

D – Trata de personas

Sobre un total de 24000 casos de trata de personas en el mundo en 2016 que se tomará como total y los años anteriores porcentuales de ese total. Sacado de [11]

Tabla III
Casos de trata de personas [11]

Año	2007	2009	2011	2013
Porcentaje	0,5	0,652	0,583	0,7083

$$(0,5.360^\circ)/1 = 180^\circ$$

Hipótesis 5: La cantidad de delito de trata aumentará y se espera para valores cercanos una alta probabilidad.

$$P_a = ((\sin(180^\circ) + \sin(234^\circ) + \sin(209^\circ)) / (3 \cdot \sin(254^\circ))) / 1$$

$$P_a = 0,44865$$

Entonces concluimos, que si bien la probabilidad no es muy alta, la tendencia es que continúen creciendo los casos de trata de personas en el mundo. La hipótesis se convalida.

IV. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Las matemáticas que se presentan como modelos originales de ciencia básica, tienen como objeto ayudar a la comprensión y desarrollo de soluciones a problemas actuales y de muy difícil abordaje. Es una obligación moral de la comunidad científica aportar a la correcta interpretación y resolución de tales problemas para beneficio del sistema sociedad.

V. AGRADECIMIENTOS

A mi familia y amigos, Rodolfo Calderón, Luis Sacaba, Ing. Gustavo Carrasco, Dr. Ing. Jorge Perera, Ing. Ricardo Adra, Candidato a Dr. Rodríguez, Candidato a Dr. Arturo López, a mi amigo Marcos Fajardo, a todo el comité JOOM. A todos ellos muchas gracias .

REFERENCIAS

- [1] Índice de criminalidad por países del mundo en tasas <https://es.numbeo.com/criminalidad/clasificaciones-por-pa%C3%ADs> Accedido 1 de diciembre 2022.
- [2] Violencia en la sociedad que repercute en la escuela <https://seguridad.nexos.com.mx/violencia-que-se-reproduce-familia-comunidad-y-escuela/> Accedido 3 de diciembre de 2022
- [3] Walpole, Myers, Myers, Ye, “*Probabilidad y estadísticas para ingeniería y ciencias*”, Editorial Pearson Prentice Hall.. Octava edición. España, 2000
- [4] Leithold, “*El cálculo con geometría analítica*”. Editorial Eccega.
- [5] Vicent Martinez, Fernando Ballesteros, Silvestre Paredes; “*Fractales y caos la aventura de la complejidad*”, Editorial Guadalmazán, 2016.
- [6] Fractales_lineales Disponible en: <https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodrpv>

/fractales/fractales-lineales/. Accedido 25 de Noviembre 2022.

- [7] Douglas C. Montgomery, George C. Runger. “*Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería*” Editorial Limusa, 2002.
- [8] Ron Larson. “*Cálculo tomo 1.*” Editorial Cengage Learning , 2015.
- [9] T. M. Apostol. “*Calculus: cálculo con funciones de una variable con una introducción al Álgebra Lineal*” Vol. 1, Editorial Reverte, 1972.
- [10] Benoit Mandelbrot, “*Los objetos fractales: Forma, Azar y Dimensión*”. Editorial Círculo de Lectores, 1997.
- [11] Trata de personas por el mundo <https://www.epdata.es/datos/trata-personas-mundo-datos-graficos/427> Accedido 9 de diciembre de 2022.
- [12] Violencia contra las mujeres datos de Argentina <https://www.argentina.gob.ar/generos/linea-144/datos-publicos-de-la-linea-144-2022> Accedido 7 de diciembre de 2022. Gobierno de Argentina.
- [13] Roberto Simson “*Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides*”, editorial Maxtor, Madrid, España, 2014.

Clasificador Naive como herramienta de decisión en la contratación de personal académico del TESCO.

Viveros-Rosas Leopoldo[#], Díaz-Téllez Rebeca^{*}; Pérez-Torres José Roberto[&];

Chew-Hernández Mario Luis[#] y Vega-González José Antonio[^];

[#]Subdirección de Estudios Profesionales “B” – TESCO, México.

^{*}División de Ingeniería en Gestión Empresarial – TESCO, México.

[^]División de Ingeniería Civil – TESCO, México.

[&] División de Ingeniería en Sistemas Computacionales – TESCO, México

Avenida 16 de Septiembre Número 54, Cabecera Municipal, Coacalco Estado de México C.P 55700

leopoldo@tesco.edu.mx, rebeca.sub.a@tesco.edu.mx, jose.roberto@tesco.edu.mx,

mario@tesco.edu.mx, a.vega@tesco.edu.mx,

Resumen - Se utiliza el modelo clasificador Naive como propuesta de herramienta para dar claridad en la decisión sobre las alternativas en la contratación de personal académico del Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco (TESCo). Se considera una base de datos de 232 personas como personal académico de las cuales se utilizan 180 para el cálculo de probabilidades, mismas que se prueban con el resto de la base de datos. Se calculan las probabilidades conjuntas y se utilizan para evaluar el clasificador. El modelo permite asignar probabilidades para cada uno de los nuevos prospectos de contratación de personal académico.

Palabras Clave - Bayes, Clasificador, Decisiones, Naive

Abstract - The Naive classifier model is used as a tool proposal to clarify the decision on the alternatives in the hiring of academic personnel of the Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco (TESCo). A database of 232 people is considered as academic personnel, of which 180 are used for the calculation of probabilities, which are tested with the rest of the database. The joint probabilities are calculated and used to evaluate the classifier. The model allows assigning probabilities for each of the new prospects for hiring academic staff.

Keywords – Bayes, Classifier, Decision, Naive.

Mathematical Subject Classification: 90B50.

I. INTRODUCCIÓN

El TESCO fue creado el 4 de septiembre de 1996, teniendo como objetivos [1]:

I. Formar profesionales e investigadores aptos para la aplicación y generación de conocimientos, con capacidad crítica y analítica en la solución de los problemas, con sentido innovador que incorpore los avances científicos y tecnológicos al ejercicio responsable de la profesión de acuerdo con los requerimientos del entorno, el estado y el país;

II. Realizar investigaciones científicas y tecnológicas que permitan el avance del conocimiento, el desarrollo de la enseñanza tecnológica y el mejor aprovechamiento social de los recursos naturales y materiales que contribuyan a la elevación de la calidad de vida comunitaria;

III. Colaborar con los sectores público, privado y social en la consolidación del desarrollo tecnológico y social de la comunidad;

IV. Realizar programas de vinculación con los sectores público, privado y social que contribuyan a la consolidación del desarrollo tecnológico y social del ser humano;

V. Realizar el proceso enseñanza-aprendizaje con actividades curriculares debidamente planeadas y ejecutadas;

VI. Promover la cultura nacional y universal especialmente la de carácter tecnológico.

De los objetivos de creación del TESCO, se desprende la necesidad de contar con personal académico que coadyuve a lograr los objetivos planteados.

De acuerdo con [2] los tres métodos más usados en aprendizaje automático en tareas de clasificación son redes bayesianas, árboles de decisión y redes neuronales artificiales, además, como lo menciona [3] el objetivo principal de las técnicas de reconocimiento de formas, aplicadas a un problema general de clasificación, consiste en asignar a un objeto o fenómeno físico una de las diversas categorías o clases previamente especificadas.

También [3] indica que las redes bayesianas modelan un fenómeno mediante un conjunto de variables y las relaciones de dependencia entre ellas, con el modelo creado se pueden hacer inferencias bayesianas estimando las probabilidades posteriores de las variables no conocidas, con base a las variables conocidas.

Por su parte [4] menciona que el clasificador Naive -Bayes, es un modelo efectivo de clasificación por su simplicidad, resistencia al ruido, poco tiempo de procesamiento y alto poder predictivo. Además, se menciona que la tarea del *clasificador* es etiquetar (clasificar) correctamente un conjunto de datos en uno de los grupos o clases previamente definidas, así, un clasificador bayesiano es una función que asigna a un objeto u observación en la clase con mayor probabilidad.

Se mencionan algunas aplicaciones encontradas de los algoritmos de clasificación.

En [5] se aplica el método Naive Bayes a textos en redes sociales para clasificar los sentimientos sobre las elecciones; las categorías fueron (positivo, negativo o neutral). Se utilizan 50 datos de entrenamiento y 10 datos de prueba.

También en [6] se implementa minería de texto y sentimientos basados en documentos en datos de Twitter que son reprocesados a través de técnicas de aprendizaje automático utilizando el método Naive Bayes.

Por su parte [7], describen el uso del clasificador Naive Bayes para asignar probabilidades de pertenencia a individuos fuentes, según la ubicación de la fuente, las propiedades de rayos X y las propiedades visuales/infrarrojas.

Además, [8] utilizan el método Naive Bayes para la detección de intrusos en un sistema de Red Informático; el algoritmo implementado muestra una precisión del 84.42%.

Por último, en [9] se utiliza un enfoque propuesto llamado técnica Master-Slaves para mejorar la clasificación del texto árabe, se implementan cuatro clasificadores diferentes en el cuerpo recopilado; el clasificador Naive Bayes fue implementado como Maestro y los demás como Esclavos.

II. PROBLEMA

Por cuestiones de manejo de información, se desarrolla un cambio en el recuento de la base de datos del personal académico del TESCO. Se considera una plantilla de 232 trabajadores bajo la dirección académica. De acuerdo con [10], el personal docente se debe encontrar dentro de las categorías de:

- ✓ Profesor de Asignatura A
- ✓ Profesor de asignatura B
- ✓ Profesor de tiempo completo asociado A
- ✓ Profesor de tiempo completo asociado B
- ✓ Profesor de tiempo completo asociado C
- ✓ Profesor de tiempo completo Titular A

En la Tabla 1, se muestra la distribución del personal en cada una de las categorías.

Tabla I
Personal por categorías del personal académico.

Categoría	Porcentaje	Personal
Asignatura A	10%	23
Asignatura B	20%	46
Asociado A	30%	70
Asociado B	20%	46
Asociado C	15%	35
Titular A	5%	12

En la Tabla II se muestran las características curriculares del personal académico.

Tabla II
Características curriculares del personal académico.

Categoría	Características Curriculares
Experiencia profesional	Menos de 5 años
	Entre 5 y 10 años
	Mas de 10 años
Experiencia laboral	Menos de 5 años
	Entre 5 y 10 años
	Mas de 10 años
Título de licenciatura	Si
	No
Posgrado	Si
	No
Perfil deseable	Si
	No
SNI	Si
	No

Debido al cambio constante de personal académico, se requiere una herramienta que permita dar claridad en la

decisión sobre la contratación del nuevo personal académico que ayude en la asignación de la categoría correspondiente de acuerdo con las características curriculares del nuevo personal.

III. DESARROLLO

En la Figura 1 se muestra la estructura para el clasificador del problema planteado.

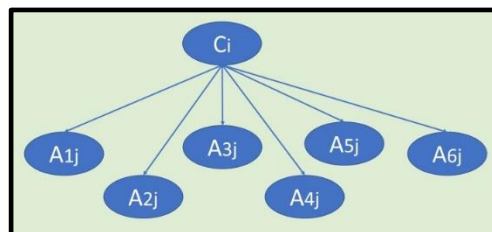


Fig. 1. Estructura para clasificador

Donde

C_i = Categorías

$i = 1$, Asignatura A

$i = 2$, Asignatura B

$i = 3$, Asociado A

$i = 4$, Asociado B

$i = 5$, Asociado C

$i = 6$, Titular A

a_{1j} = Experiencia Docente

$j = 1$, Menos de 5 años

$j = 2$, Entre 5 y 10 años

$j = 3$, Mas de 10 años

a_{2j} = Experiencia Profesional

$j = 1$, Menos de 5 años

$j = 2$, Entre 5 y 10 años

$j = 3$, Mas de 10 años

a_{3j} = Título de licenciatura

$j = 1$, Si

$j = 2$, No

a_{4j} = Posgrado

$j = 1$, Si

$j = 2$, No

a_{5j} = Perfil deseable

$j = 1$, Si

$j = 2$, No

a_{6j} = SNI

$j = 1$, Si

$j = 2$, No

De acuerdo con el Teorema de Bayes, la probabilidad de que una observación (a_{1j} , a_{2j} , a_{3j} , a_{4j} , a_{5j} , a_{6j}) pertenezca a la clase C_i se calcula con la ecuación 1.

$$P(C = c_i | a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}, a_{5i}, a_{6i}) = \frac{P(C=c)(P(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}, a_{5i}, a_{6i} | C=c))}{P(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}, a_{5i}, a_{6i})} \quad (1)$$

Se consideran 180 elementos de la plantilla adscrita a la dirección académica para desarrollar las distribuciones de probabilidad, se estiman los parámetros de las distribuciones de probabilidad que se describen en la red de la Figura 1.

En la Tabla III se muestran los resultados de los datos curriculares observados.

Tabla III
Datos curriculares observados

Experiencia Docente	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
menos de 5 años	7	19	23	5	29	4
entre 5 y 10 años	5	7	19	6	21	3
mas de 10 años	1	9	10	4	4	4
	13	35	52	15	54	11
Experiencia Profesional	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
menos de 5 años	5	20	31	8	28	6
entre 5 y 10 años	5	11	19	4	17	3
mas de 10 años	3	4	2	3	9	2
TITULO LICENCIATURA	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
SI	13	35	52	15	54	11
NO	0	0	0	0	0	0
POSGRADO	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
SI	0	0	40	11	45	8
NO	13	35	12	4	9	3
PERFIL DESEABLE	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
SI	0	0	44	9	43	7
NO	13	35	8	6	11	4
SNI	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
SI	0	0	0	0	0	4
NO	13	35	52	15	54	7
TOTALES	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
	13	35	52	15	54	11

Considerando que la estimación de la distribución de probabilidad de la categoría $P(C_i)$ y de la distribución condicional $P(a_{ij} / C_i)$ se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de los correspondientes sucesos, el valor para las probabilidades estimadas será:

$$P(a_{ij} | C_i) = \frac{n(a_{ij}, C=c)}{n(C=c)} \quad (2)$$

De la Tabla III se puede observar que todos los casos de la característica curricular a_{32} (Título de licenciatura = no) no cuenta con ningún elemento motivo por el cual se decide eliminar dicha categoría. También se observa que algunas características curriculares no cuentan con elementos, pero no en todos los casos, por lo que se aplica el corrector de Laplace [11], el cual evita que se asigne una probabilidad nula para que no se elimine por completo la probabilidad final.

Aplicando el corrector de Laplace y la ecuación 2 a la Tabla III, se tienen los resultados de las probabilidades conjuntas, que se muestran en la Tabla IV.

Tabla IV.
Probabilidades Conjuntas

P(A1 Ci) Categoría i	P(Requisito Experiencia Docente)		
	menos de 5 años	entre 5 y 10 años	más de 10 años
Asignatura A	1/2	3/8	1/8
Asignatura B	10/19	4/19	5/19
Asociado A	24/55	4/11	1/5
Asociado B	1/3	7/18	5/18
Asociado C	10/19	22/57	5/57
Titular A	4/11	3/11	4/11

P(A2 Ci) Categoría i	P(Requisito Experiencia Profesional)		
	menos de 5 años	entre 5 y 10 años	más de 10 años
Asignatura A	3/8	3/8	1/4
Asignatura B	21/38	6/19	5/38
Asociado A	32/55	4/11	3/55
Asociado B	1/2	5/18	2/9
Asociado C	29/57	6/19	10/57
Titular A	6/11	3/11	2/11

P(A3 Ci) Categoría i	P(Posgrado)	
	Si	No
Asignatura A	1/8	7/8
Asignatura B	1/19	18/19
Asociado A	10/13	3/13
Asociado B	11/15	4/15
Asociado C	5/6	1/6
Titular A	8/11	3/11

P(A4 Ci) Categoría i	P(Perfil Deseable)	
	Si	No
Asignatura A	1/8	7/8
Asignatura B	1/37	36/37
Asociado A	11/13	2/13
Asociado B	3/5	2/5
Asociado C	43/54	11/54
Titular A	7/11	4/11

P(A5 Ci) Categoría i	P(SNI)	
	Si	No
Asignatura A	1/8	7/8
Asignatura B	1/19	18/19
Asociado A	2/55	53/55
Asociado B	1/9	8/9
Asociado C	2/57	55/57
Titular A	4/11	7/11

De igual forma, de la misma Tabla III se obtienen la distribución de probabilidad para cada una de las categorías que se muestran en la Tabla V.

Tabla V
Probabilidades por Categoría

	ASIGNATURA A	ASIGNATURA B	ASOCIADO A	ASOCIADO B	ASOCIADO C	TITULAR A
P(CATEGORIA.i)	16/195	38/195	11/39	6/65	19/65	11/195

En la Tabla VI se muestran las 72 combinaciones posibles para las características curriculares del personal académico del TESCO.

IV. RESULTADOS

Con los resultados de las probabilidades conjuntas que se muestran en la Tabla IV se prueba el clasificador, evaluando las probabilidades para los 52 elementos de la base de datos que no se ocuparon para el desarrollo de este.

Tabla VI
Características Curriculares

Se ilustra el cálculo para la alternativa

$$\alpha P(C_i)P(a_{11}|C_i)P(a_{21}|C_i)P(a_{41}|C_i)P(a_{51}|C_i)P(a_{61}|C_i) = \quad (3)$$

Donde α es la constancia de proporcionalidad.

Sustituyendo la ecuación (3) para cada una de las alternativas se obtiene

$$\text{Asignatura A} \\ \alpha \left(\frac{16}{195}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{33280} \alpha \quad (4)$$

$$\text{Asignatura B} \\ \alpha \left(\frac{38}{195}\right) \left(\frac{10}{19}\right) \left(\frac{21}{38}\right) \left(\frac{1}{19}\right) \left(\frac{1}{37}\right) \left(\frac{1}{19}\right) = \frac{14}{3299179} \alpha \quad (5)$$

$$\text{Asociado A} \\ \alpha \left(\frac{11}{39}\right) \left(\frac{24}{55}\right) \left(\frac{32}{55}\right) \left(\frac{10}{13}\right) \left(\frac{11}{13}\right) \left(\frac{2}{55}\right) = 0.0017 \alpha \quad (6)$$

$$\text{Asociado B} \\ \alpha \left(\frac{6}{65}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{11}{15}\right) \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{11}{14625} \alpha \quad (7)$$

$$\text{Asociado C} \\ \alpha \left(\frac{19}{65}\right) \left(\frac{10}{19}\right) \left(\frac{29}{57}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{43}{54}\right) \left(\frac{2}{57}\right) = 0.0018 \alpha \quad (8)$$

$$\text{Titular A} \\ \alpha \left(\frac{11}{195}\right) \left(\frac{4}{11}\right) \left(\frac{6}{11}\right) \left(\frac{8}{11}\right) \left(\frac{7}{11}\right) \left(\frac{4}{11}\right) = 0.0019 \alpha \quad (9)$$

Normalizando las ecuaciones anteriores.

$$\alpha \left(\frac{1}{33280} + \frac{14}{3299179} + 0.0017 + \frac{11}{14625} + 0.0018 + 0.0019\right) = 1 \quad (10)$$

Por lo tanto

$$\alpha = 161.644 \quad (11)$$

Donde α es el valor necesario para que se cumpla la ecuación (10).

	Experiencia Docente	Experiencia Profesional	Posgrado	Perfil Deseable	SNI
1	x < 5	x < 5	SI	SI	SI
2	5 < x < 10	x < 5	SI	SI	SI
3	x > 10	x < 5	SI	SI	SI
4	x < 5	5 < x < 10	SI	SI	SI
5	5 < x < 10	5 < x < 10	SI	SI	SI
6	x > 10	5 < x < 10	SI	SI	SI
7	x < 5	x > 10	SI	SI	SI
8	5 < x < 10	x > 10	SI	SI	SI
9	x > 10	x > 10	SI	SI	SI
10	x < 5	x < 5	NO	SI	NO
11	5 < x < 10	x < 5	NO	SI	NO
12	x > 10	x < 5	NO	SI	NO
13	x < 5	5 < x < 10	NO	SI	NO
14	5 < x < 10	5 < x < 10	NO	SI	NO
15	x > 10	5 < x < 10	NO	SI	NO
16	x < 5	x > 10	NO	SI	NO
17	5 < x < 10	x > 10	NO	SI	NO
18	x > 10	x > 10	NO	SI	NO
19	x < 5	x < 5	SI	NO	SI
20	5 < x < 10	x < 5	SI	NO	SI
21	x > 10	x < 5	SI	NO	SI
22	x < 5	5 < x < 10	SI	NO	SI
23	5 < x < 10	5 < x < 10	SI	NO	SI
24	x > 10	5 < x < 10	SI	NO	SI
25	x < 5	x > 10	SI	NO	SI
26	5 < x < 10	x > 10	SI	NO	SI
27	x > 10	x > 10	SI	NO	SI
28	x < 5	x < 5	NO	NO	NO
29	5 < x < 10	x < 5	NO	NO	NO
30	x > 10	x < 5	NO	NO	NO
31	x < 5	5 < x < 10	NO	NO	NO
32	5 < x < 10	5 < x < 10	NO	NO	NO
33	x > 10	5 < x < 10	NO	NO	NO
34	x < 5	x > 10	NO	NO	NO
35	5 < x < 10	x > 10	NO	NO	NO
36	x > 10	x > 10	NO	NO	NO
37	x < 5	x < 5	SI	SI	SI
38	5 < x < 10	x < 5	SI	SI	SI
39	x > 10	x < 5	SI	SI	SI
40	x < 5	5 < x < 10	SI	SI	SI
41	5 < x < 10	5 < x < 10	SI	SI	SI
42	x > 10	5 < x < 10	SI	SI	SI
43	x < 5	x > 10	SI	SI	SI
44	5 < x < 10	x > 10	SI	SI	SI
45	x > 10	x > 10	SI	SI	SI
46	x < 5	x < 5	NO	SI	NO
47	5 < x < 10	x < 5	NO	SI	NO
48	x > 10	x < 5	NO	SI	NO
49	x < 5	5 < x < 10	NO	SI	NO
50	5 < x < 10	5 < x < 10	NO	SI	NO
51	x > 10	5 < x < 10	NO	SI	NO
52	x < 5	x > 10	NO	SI	NO
53	5 < x < 10	x > 10	NO	SI	NO
54	x > 10	x > 10	NO	SI	NO
55	x < 5	x < 5	SI	NO	SI
56	5 < x < 10	x < 5	SI	NO	SI
57	x > 10	x < 5	SI	NO	SI
58	x < 5	5 < x < 10	SI	NO	SI
59	5 < x < 10	5 < x < 10	SI	NO	SI
60	x > 10	5 < x < 10	SI	NO	SI
61	x < 5	x > 10	SI	NO	SI
62	5 < x < 10	x > 10	SI	NO	SI
63	x > 10	x > 10	SI	NO	SI
64	x < 5	x < 5	NO	NO	NO
65	5 < x < 10	x < 5	NO	NO	NO
66	x > 10	x < 5	NO	NO	NO
67	x < 5	5 < x < 10	NO	NO	NO
68	5 < x < 10	5 < x < 10	NO	NO	NO
69	x > 10	5 < x < 10	NO	NO	NO
70	x < 5	x > 10	NO	NO	NO
71	5 < x < 10	x > 10	NO	NO	NO
72	x > 10	x > 10	NO	NO	NO

Con el valor de α mostrado en la ecuación 11 se obtienen las siguientes probabilidades para cada una de las categorías dependiendo de las características curriculares de la ecuación 3

$$P(\text{Asignatura A} | a_{i1}) = 0.006 \quad (12)$$

$$P(\text{Asignatura B} | a_{i1}) = 0.002 \quad (13)$$

$$P(\text{Asociado A} | a_{i1}) = 0.274 \quad (14)$$

$$P(\text{Asociado B} | a_{i1}) = 0.122 \quad (15)$$

$$P(\text{Asociado C} | a_{i1}) = 0.290 \quad (15)$$

$$P(\text{Titular A} | a_{i1}) = 0.306 \quad (16)$$

Con el procedimiento descrito en la ecuación. 3 a la 16 se aplica a los 52 datos de prueba, obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla VII.

Tabla VII
Evaluación del Clasificador

Categoría	Elementos de Prueba	Clasificados Correctamente	Porcentaje
Asignatura A	4	2	50%
Asignatura B	10	4	40%
Asociado A	15	9	60%
Asociado B	4	3	75%
Asociado C	15	8	53%
Titular A	4	2	50%

V. CONCLUSIONES

Se puede observar que el clasificador cuenta con una eficacia promedio superior al 50%, sobre todo en las categorías de Asociado A, B y C. Para que mejore la eficacia del clasificador se debe pedir que se analicen otras características curriculares que permitan dar mayor claridad en la evaluación de prospectos de personal académico para el TESCO.

REFERENCIAS

- [1] Gobierno del Estado de México, “Gaceta de Gobierno”, México, 1996. Consultado: oct. 03, 2022. [En línea]. Disponible en: https://legislacion.edomex.gob.mx/ve_periodico_oficial
- [2] C. Malagón Luque, “Clasificadores bayesianos. El algoritmo Naïve Bayes”. Consultado: oct. 03, 2022. [En línea]. Disponible http://www.nebrija.es/~cmalagon/inco/Apuntes/bayesian_learning.pdf
- [3] B. Sierra Araujo, “Aprendizaje automático: conceptos básicos y avanzados”, Primera., vol. 1. España: Pearson - Prentice Hall, 2006.
- [4] F. de, C. Matemáticas, U. de Posgrado, A. Carlos, y A. Jaimes, “Optimización del clasificador ‘Naïve Bayes’ usando árbol de decisión c4.5” tesis para optar el grado académico de magister en estadística, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2015.
- [5] D. Nurcahyono, W. P. Putra, A. Najib, y T. R. Tulili, “Analysis sentiment in social media against election using the method naïve Bayes”, en Journal of Physics: Conference Series, jun. 2020, vol. 1511, núm. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1511/1/012003.
- [6] Samsir et al., “Naïves Bayes Algorithm for Twitter Sentiment Analysis”, en Journal of Physics: Conference Series, jun. 2021, vol. 1933, núm. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1933/1/012019.
- [7] P. S. Broos, K. v. Getman, M. S. Povich, L. K. Townsley, E. D. Feigelson, y G. P. Garmire, “A naïve bayes source classifier for X-ray sources”, Astrophysical Journal, Supplement Series, vol. 194, núm. 1, may 2011, doi: 10.1088/0067-0049/194/1/4.
- [8] P. A. Rahayuningsih, R. Maulana, W. Irmayani, D. Saputra, y D. Purwaningti, “Feature Dependent Naïve Bayes for Network Intrusion

Detection System”, en Journal of Physics: Conference Series, nov. 2020, vol. 1641, núm. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1641/1/012023.

- [9] Z. A. Abutiheen, A. H. Aliwy, y K. B. S. Aljanabi, “Arabic text classification using master-slaves technique”, en Journal of Physics: Conference Series, jun. 2018, vol. 1032, núm. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1032/1/012052.
- [10] Tecnológico nacional de México, “Lineamientos que establecen los requisitos y condiciones que debe reunir el personal académico que imparte planes y programas de estudio en los institutos tecnológicos descentralizados”, Consultado: oct. 03, 2022. [En línea]. Disponible en: <http://www.dgest.gob.mx/itd/academica-ditd>.
- [11] TeamUNO blog A project from a data scientists team, “Naïve Bayes como herramienta contra la agregación y segregación de datos”, Consultado: oct. 03, 2022. [En línea]. Disponible en: <http://teamuno.github.io/2015/07/12/uso-naive-bayes/#:~:text=Recordemos%20que%20la%20correcci%C3%B3n%20de,por%20completo%20la%20probabilidad%20final.>, nov. 02, 2022.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*